REVISIONE
DELLA TEORIA MATEMATICA DELL'INTERESSE

LUIGI AMOROSO

1. *La posizione del problema.*

Il concetto fondamentale al quale è ispirata la teoria generale dell'equilibrio economico è che le variabili che definiscono la configurazione del sistema sono fra di loro *interdipendenti* e come tali non possono essere determinate se non *simultaneamente* attraverso alla risoluzione di un sistema di equazioni, che legano fra di loro *tutte* le incognite. La separazione delle variabili in corrispondenza dei vari settori, in cui si svolge la attività economica, può essere quindi un punto di arrivo, cui l'analisi teorica giunge attraverso ad un processo di eliminazione algebrica, ma non può essere un punto di partenza nella impostazione del problema.

Non si infirma tuttavia la verità generale di questo principio, se ne tempera la rigidità a scopo propedeutico nell'intento di sciogliere i nodi uno alla volta e sempre che la separazione è subordinata al criterio di limitare l'attenzione, in prima approssimazione, a quelle variabili, che nel settore considerato hanno importanza prevalente.

Con queste riserve nessuna obiezione può essere sollevata in linea di principio contro la teoria matematica dell'interesse quale è stata costruita dallo IRVING FISHER e che è ispirata al concetto che il saggio di interesse dipenda essenzialmente — *in prima approssimazione* — da operazioni di mutuo (prestito) e di investimento che sono eseguite sul mercato finanziario.

Il problema è posto dall'Autore nei seguenti termini.

Supponiamo che sul mercato finanziario sia un certo numero di operatori (attori) e che le operazioni considerate si estendano ai tempi 1, 2, ... n. Supponiamo ancora che sull'intervallo considerato il valore della moneta resti *stabile* nel senso che resti *invariato il livello generale dei prezzi*; e che invece il saggio di interesse, pur restando costante nelle singole unità di tempo, vari (evidentemente con discontinuità) nel passaggio dall'una all'altra. Diciamo allora

$$(1) \qquad i_1, \; i_2, \; .... \; i_{n-1},$$

la successione dei valori relativi, intendendo con ciò che dall'istante 1 all'istante 2 il saggio di interesse resti costante ed uguale ad i_1; dall'istante 2 all'istante 3 resti costante ed uguale ad i_2, così via.

Diciamo poi in valore e segno:

$$(2) \qquad x_1, \; x_2, \; .... \; x_n$$

le somme che un operatore generico paga (o riscuote se $x < 0$) rispettivamente ai tempi 1, 2, ... n in relazione ad operazioni di mutuo;

$$(3) \qquad y_1, \; y_2, \; .... \; y_n$$

le somme analoghe che paga (o riscuote) in relazione ad operazioni di investimento.

Il flusso del reddito totale per il complesso delle operazioni sarà allora rappresentato in valore e segno dalla successione

$$(4) \qquad z_1 = x_1 + y_1, \; z_2 = x_2 + y_2, \; .... \; z_n = x_n + y_n \, .$$

Il Fisher suppone che per ciascun operatore l'ofelimità totale sia una funzione di questa quantità e cioè una espressione della forma.

$$(5) \qquad \Phi\,(z_1, \; z_2, \; .... \; z_n)$$

e che ciascun attore ispiri la sua condotta al criterio di conseguire il *massimo di ofelimità*.

In tal modo determina per ciascun attore le quantità (2) e (3) in funzione delle (1). Imponendo successivamente la condizione che il valore totale delle somme mutuate sia in ogni istante pari al valore totale delle somme prese a mutuo, scrive le equazioni di *chiusura del circuito* e determina così le quantità $i_1, i_2, ... i_{n-1}$.

2. *La condizione della equità matematica.*

Il problema di massimo di cui è detto al n. precedente è un problema di massimo *condizionato*, nel senso che le variabili x e y che, attraverso le z figurano nella espressione della funzione Φ non sono tra di loro indipendenti, ma sono legate da due condizioni, delle quali l'una si riferisce alle operazioni di mutuo e l'altra alle operazioni di investimento. La condizione relativa alle operazioni di mutuo è quella della *equità matematica* che il FISHER scrive nella forma

$$(6) \quad x_1 + \frac{x_2}{(1+i_1)} + \frac{x_3}{(1+i_1)(1+i_2)} + \dots + \frac{x_n}{(1+i_1)(1+i_2)\dots(1+i_{n-1})} = 0\,.$$

Essa esprime che è nullo il valore attuale di tutti i pagamenti e di tutte le riscossioni, corrispondenti ad uno stesso operatore, *avendo supposto che ciascuna somma sia scontata in relazione ai successivi valori del saggio di interesse.*

Questa ipotesi corrisponde alla realtà solo approssimativamente, perchè:

a) per le operazioni a *breve* scadenza, qualificate *attive* nei confronti delle banche — quali sconto di cambiali, anticipazioni, aperture di conto corrente — l'onere degli interessi è computato ad un saggio che è sensibilmente *superiore* al saggio di mercato *pro tempore*, se per saggio di mercato si assume quello che corrisponde al frutto dei titoli pubblici ed in particolare del consolidato;

b) il beneficio degli interessi è, per contro, computato ad un saggio sensibilmente *inferiore* al saggio di mercato per le operazioni pure a *breve* scadenza, che sono qualificate *passive* nei confronti delle banche, quali i depositi a risparmio ed in conto corrente, ordinario e vincolato;

c) per le operazioni a *lunga* scadenza, quali le ipoteche, lo sconto di annualità, le sottoscrizioni ai prestiti pubblici ed alle obbligazioni delle società commerciali, il saggio di interesse si mantiene in generale *invariato* per tutta la durata della operazione. Sicchè anche in questo caso vi è uno scarto fra il saggio costante relativo all'operazione ed il saggio di mercato che è invece variabile.

In realtà avviene che i pagamenti e le riscossioni che sono eseguiti in un dato istante da uno stesso operatore sono computati a saggi diversi, di cui alcuni possono essere superiori, altri inferiori al saggio di mercato. Nella presunzione che le differenze in senso contrario nel complesso si compensino e considerato altresì che la formulazione di una casistica porterebbe a complicazioni di carattere matematico, delle quali diremo più avanti, ma sulle quali sul momento intendiamo sorvolare, accettiamo per il momento l'ipotesi implicita nella equazione (4).

3. *La equazione degli investimenti.*

Le variabili $y_1, y_2, \ldots y_n$ corrispondenti alle operazioni di investimento sono legate invece da una equazione della forma

$$F(y_1, y_2, \ldots y_n) = 0 \tag{7}$$

che si dice *equazione degli investimenti.*

Se essa ammette le due soluzioni

$$y_1 = a_1, \; y_2 = a_2, \; y_3 = y_4 = \ldots = y_n = 0$$

$$y_1 = b_1, \; y_2 = b_2, \; y_3 = y_4 = \ldots = y_n = 0$$

vuol dire che vi è scelta fra

un investimento che rende a_1 il primo anno ed a_2 il secondo;

ed un investimento che rende b_1 il primo anno e b_2 il secondo.

Poichè evidentemente nessuno prenderebbe in considerazione un'alternativa che portasse ad una diminuzione del reddito presente, se essa non fosse compensata da un aumento più che proporzionato del reddito futuro, ne viene di conseguenza che se è, per fissare le idee, $a_1 < b_1$, deve essere in compenso

$$a_2 > b_2, \qquad a_2 - b_2 > b_1 - a_1$$

In generale perchè l'equazione (7) rappresenti effettivamente le diverse possibilità fra cui si presenta scelta in concreto, la funzione F deve esser tale che se è

$$dy_1 < 0, \; dy_3 = dy_4 = \ldots = dy_n = 0,$$

da

$$\frac{\partial F}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial F}{\partial y_2} dy_2 = 0$$

segua

$$dy_1 + dy_2 > 0.$$

Ne deriva che la funzione F deve soddisfare alla disuguaglianza

$$\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y_1} - \dfrac{\partial F}{\partial y_2}}{\dfrac{\partial F}{\partial y_2}} = -\frac{dy_1 + dy_2}{dy_1} > 0$$

ed in generale a tutte le

$$(8) \qquad F_s = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial y_s} - \dfrac{\partial F}{\partial y_{s+1}}}{\dfrac{\partial F}{\partial y_{s+1}}} > 0 \qquad s = 1,\, 2,\, \dots n\,.$$

Alla quantità F_s così definita diamo il nome di *saggio di produttività di un investimento eseguito nell'anno s e realizzato nell'anno* $s+1$.

4. *La condotta dei singoli operatori.*

Riassumendo, le quantità x ed y debbono essere tali da attribuire un valore massimo alla funzione Φ subordinatamente alla condizione di verificare alle equazioni (6), (7).

Perchè questo sia, occorre che detti allora λ e μ due moltiplicatori di Lagrangia sia verificata la equazione

$$\sum_{s=1}^{n} \left\{ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_s} + \frac{\lambda}{(1+i_1)(1+i_2)\dots(1+i_{s-1})} \right) dx_s + \right. \left. + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y_s} + \mu \frac{\partial F}{\partial y_s} \right) dy_s \right\} = 0$$

qualunque siano i differenziali delle variabili. Segue allora

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_s} + \frac{\lambda}{(1+i_1)(1+i_2)\dots(1+i_{s-1})} = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_s} + \mu \frac{\partial F}{\partial y_s} = 0$$

ed eliminando λ e μ, tenuto conto che per la forma della funzione (5) è

$$(9) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} = \frac{\partial \Phi}{\partial y_s}$$

si raccoglie

(10) $$1+i_s=\frac{\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_s}}{\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_{s+1}}}=\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y_s}}{\dfrac{\partial F}{\partial y_{s+1}}}\qquad s=1,\ 2,\ \dots\ n-1\,.$$

Le equazioni (10) insieme alle (6) ed alle (7) costituiscono un sistema di $2n$ equazioni indipendenti che — per ciascun operatore — determinano le quantità x ed y, cioè le quantità mutuate (*o prese a mutuo*), investite (*o disinvestite*) in funzione della successione dei valori del saggio di interesse.

5. *Il principio marginale.*

Se teniamo presente la posizione (8) vediamo che il gruppo delle equazioni a destra porta a

(11) $$i_s=F_s,$$

e questa formula ci dice che ogni operatore seguita ad investire (o a disinvestire) fino al punto in cui il *saggio di produttività si livella al saggio di interesse* pro tempore.

Analogo è il significato del gruppo delle equazioni a sinistra che si riferiscono alle operazioni di mutuo.

Invero la quantità

(12) $$\Phi_s=-\frac{\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_{s+1}}-\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_s}}{\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_{s+1}}},$$

misura in generale la preferenza che l'operatore attribuisce alla unità monetaria al tempo s rispetto alla unità monetaria al tempo $s+1$.

Diremo allora genericamente che essa misura *il saggio di preferenza dei beni presenti rispetto ai beni futuri.* Introdotta questa quantità, le equazioni (10) — a sinistra — si scrivono

(13) $$i_s=\Phi_s\qquad s=1,\ 2,\ \dots\ n-1$$

ed esprimono che ciascun operatore prende a prestito (*se originariamente era $\Phi_s>i_s$*) o dà a prestito (*se era invece $\Phi_s<i_s$*), arrestando in ogni caso le operazioni quando è raggiunta la uguaglianza

(13). Brevemente diremo che *aggiusta il suo reddito* in modo da livellare in ogni istante il saggio *di preferenza* (dei beni presenti rispetto ai beni futuri) al saggio di interesse pro tempore.

Le formule (11) e (13) esprimono il *principio marginale.*

6. *Il massimo rendimento.*

È importante osservare che se nelle equazioni (12) supponiamo costanti tutte le x, le quantità $y_1, y_2, \ldots y_n$ attribuiscono valore massimo alle combinazioni

$$(14) \qquad Y = y_1 + \frac{y_2}{1+i_1} + \frac{y_3}{(1+i_1)(1+i_2)} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{y_n}{(1+i_1)(1+i_2)\ldots(1+i_{n-1})}$$

sempre nell'ipotesi che le quantità $y_1, y_2, \ldots y_n$ siano vincolate alla condizione di soddisfare alla equazione (7).

Scrivendo infatti che y deve essere massimo, condizionatamente alle equazioni (7), si ricade nelle formule (11).

La combinazione Y rappresenta il valore iniziale (al tempo 1) della successione dei redditi (dal tempo 1 al tempo n); ne risulta dunque che la configurazione individuata dal principio marginale è quella che assicura *il massimo rendimento* nei limiti delle possibilità, espresse dalla equazione degli investimenti.

7. *La condizione di chiusura del circuito.*

Il sistema delle equazioni (6), (7), (11) e (13) determina i valori delle x e delle y, cioè la condotta di un operatore generico in tutto l'intervallo che corre dal tempo 1 al tempo n, sempre che sia supposto che sia noto nello stesso intervallo il movimento del saggio di interesse.

Se il mercato *è chiuso* — nel senso che *moneta non entra e non esce, non viene distrutta, nè viene creata* — allora deve evidentemente esser nulla in ogni istante la somma algebrica di tutte le quantità date e prese a mutuo da tutti gli attori operanti sul mercato.

Otteniamo così le $n-1$ equazioni

$$(15) \qquad \Sigma x_1 = 0\,, \quad \Sigma x_2 = 0\,, \quad \ldots \quad \Sigma x_{n-1} = 0$$

in cui è evidente il significato dei simboli e che determinano le $n-1$ incognite $i_1, i_2, \ldots i_{n-1}$.

Le equazioni (15) possono essere definite come quelle che rappresentano la *chiusura* del circuito dei capitali. Esse esprimono in sostanza che deve esservi equilibrio in ogni istante fra la domanda e l'offerta di risparmio.

8. *Riepilogo delle condizioni fisheriane.*

Riassumendo: per determinare il saggio di interesse in un dato intervallo di tempo occorre secondo il procedimento indicato dal Fisher assumere come incognite *principali* del problema la successione dei valori (1) e come incognite *ausiliarie* le successioni dei valori (2) e (3), per tutti gli operatori *esistenti sul mercato.*

Le incognite *principali* e le incognite *ausiliarie* sono determinate simultaneamente da un sistema di equazioni, che possono esser distinte in cinque gruppi fondamentali$_1$

equazioni (6), che esprimono che per il complesso di tutte le operazioni di prestito eseguite da uno stesso operatore è verificata la condizione della equità matematica;

equazioni (7) che esprimono il vincolo che limita la scelta degli investimenti da parte di ogni singolo operatore;

equazioni (11) esprimenti che ciascun operatore limita le operazioni di prestito al punto in cui il saggio di investimento si livella al saggio di interesse pro tempore;

equazioni (13) esprimenti che analogamente il saggio di preferenza (dei beni presenti rispetto ai beni futuri) si livella allo stesso saggio di interesse.

Le equazioni di questi primi quattro gruppi esprimono in complesso che ciascun operatore è animato dal criterio di raggiungere tra tutte le posizioni che gli sono accessibili quella che corrisponde per lui al massimo di ofelimità. Il quinto gruppo è rappresentato dalle

equazioni (15) esprimenti infine che il circuito dei capitali è chiuso; cioè che vi è equilibrio fra la domanda e l'offerta di risparmio.

9. *Il credito bancario.*

La teoria così come è stata costruita e che abbiamo fin qui riassunto offre il fianco ad alcune obiezioni.

La prima riflette l'equazione di chiusura del circuito.

Poichè si impone la condizione che il valore totale di tutte le somme mutuate deve esser pari in ogni istante al valore totale di tutte le somme prese a mutuo è evidente che debbono essere compresi nel totale anche i debiti ed i crediti bancari. Ciò significa che nello schema considerato le banche figurano come attori che operano sul mercato finanziario alla stessa stregua di tutti gli altri operatori.

Ma una rappresentazione così fatta è in contradizione col principio marginale, quale è espresso dalle equazioni (11) e (13). Le banche invero non allargano o restringono il credito nell'intento di livellare un saggio di investimento o di preferenza al saggio di interesse. In generale esse non pongono limiti alla accettazione di depositi e per ciò che concerne le operazioni attive sono tenute ad inquadrare le loro attività entro confini che sono tracciati dalla banca centrale in relazione alle esigenze imposte dalla condizione — qui posta come ipotesi — di mantenere *stabile* il valore della moneta.

La contradizione non può essere eliminata, se non cancellando le banche dal complesso degli attori operanti sul mercato. Ma se questo si fa, ne viene di conseguenza che il valore totale delle somme mutuate non è più pari al valore totale delle somme prese a mutuo. Resta un saldo, pari in ogni unità di tempo alla differenza fra il totale dei crediti concessi e quello dei depositi raccolti, che corrisponde in valore e segno alla quantità della moneta bancaria creata o distrutta nello stesso periodo.

Detta allora

$$M_1\,, \quad M_2\,, \quad \dots \quad M_{n-1} \tag{16}$$

la successione dei valori che rappresentano la quantità della moneta bancaria creata (o distrutta se $M < 0$) rispettivamente negli intervalli di tempo da 0 a 1, da 1 a 2, ... da $n - 1$ ad n, le equazioni di chiusura del circuito assumono la forma

$$\Sigma x_1, = M_1, \ \Sigma x_2 = M_2\,, \quad \dots \quad \Sigma x_{n-1} = M_{n-1} \tag{17}$$

e queste equazioni debbono sostituire le (15).

Nel sistema che ne risulta le quantità (16) debbono essere pensate come costituenti un dato del problema *determinato dal sistema bancario nel suo complesso*, il quale ora allarga, ora restringe il credito, *nell'intento di mantenere la stabilità della moneta, qui presunta per ipotesi.*

10. *Il saggio di interesse reale.*

Le considerazioni del numero precedente acquistano maggiore chiarezza, se modifichiamo lo schema teorico in modo da lasciar cadere l'*ipotesi della stabilità monetaria.* In questo intento introducendo una nuova successione

$$(18) \qquad P_1, \quad P_2, \quad \dots \quad P_n$$

i cui termini esprimono *il livello generale dei prezzi* rispettivamente ai tempi 1, 2, ... n.

Alle variabili x, indicate in (2), sostituiamo in conseguenza

$$(19) \qquad \xi_1 = \frac{x_1}{P_1}, \ \xi_2 = \frac{x_2}{P_2}, \quad \dots \quad \xi_n = \frac{x_n}{P_n};$$

alle y indicate in (3) sostituiamo

$$(20) \qquad \eta_1 = \frac{y_1}{P_1}, \ \eta_2 = \frac{y_2}{P_2}, \quad \dots \quad \eta_n = \frac{y_n}{P_n};$$

alle z, definite dalle (4) sostituiamo

$$(21) \qquad T_1 = \xi_1 + \eta_1, \quad T_2 = \xi_2 + \eta_2, \quad \dots \quad T_n = \xi_n + \eta_n$$

Poichè evidentemente ciò che determina la condotta dei singoli attori sulla scena economica non è la considerazione dei valori nominali, ma quella dei valori reali, la funzione ofelimità dovrà essere pensata come dipendente dalle T e quindi rappresentata con una espressione della forma

$$(22) \qquad \Phi(T_1, T_2, \dots T_n);$$

ed analogamente la equazione degli investimenti dovrà esser pensata come un legame fra le η della forma

(23) $$F(\eta_1, \eta_2, \dots \eta_n) = 0 .$$

Resta ferma invece la equazione (6) perchè la condizione della equità matematica rappresentando il rispetto dei contratti in corso, si riferisce ai valori nominali.

Ciò stabilito, se riproduciamo punto per punto gli stessi sviluppi di cui al n. 4, giungiamo alle formule

(24) $$1 + i_s = \frac{\dfrac{1}{P_s}\dfrac{\partial \Phi}{\partial \xi_s}}{\dfrac{1}{P_{s+1}}\dfrac{\partial \Phi}{\partial \xi_{s+1}}} = \frac{\dfrac{1}{P_s}\dfrac{\partial F}{\partial \eta_s}}{\dfrac{1}{P_{s+1}}\dfrac{\partial F}{\partial \eta_{s+1}}} \qquad s = 1, 2, \dots n-1 .$$

Per interpretarle introduciamo le variabili

(25) $$m_1, m_2, \dots m_{n-1} ,$$

definite da

(26) $$P_{s+1} = (1 + m_s) P_s ;$$

e le variabili

(27) $$j_1, j_2, \dots j_{n-1}$$

definite da,

$$(1 + i_s) = (1 + m_s)(1 + j_s) ,$$

dalla quale risulta

(28) $$j_s = \frac{i_s - m_s}{1 + m_s} ;$$

le (25) rappresentano il *saggio di incremento* del livello generale dei prezzi, *nelle successive unità di tempo*; analogamente le (27) rappresentano il *saggio di interesse reale* (cioè il saggio di interesse espresso in termini di capacità di acquisto).

Con l'introduzione di queste variabili le formule (24) divengono

(29) $$j_s = \frac{\dfrac{\partial \Phi}{\partial \xi_s} - \dfrac{\partial \Phi}{\partial \xi_{s+1}}}{\dfrac{\partial \Phi}{\partial \xi_{s+1}}} = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial \eta_s} - \dfrac{\partial F}{\partial \eta_{s+1}}}{\dfrac{\partial F}{\partial \eta_{s+1}}} , \quad s = 1, 2, \dots n-1 .$$

che sostituiscono rispettivamente le (11) e le (13) e rappresentano nella nuova ipotesi il *principio marginale*, che resta fermo anche nell'enunciato, *salvo la sostituzione del saggio d'interesse reale* j *al saggio nominale* i.

Restano a considerare le equazioni (17) che rappresentano la condizione di chiusura del circuito dei capitali.

Esse restano formalmente invariate. Sostanzialmente vi è la differenza che non è specificato l'intento che il sistema bancario si propone di raggiungere attraverso alla manovra della quantità di moneta in circolazione. Questo intento può essere quello di mantenere la stabilità monetaria e può essere invece quello di imprimere al movimento dei prezzi una determinata tendenza al rialzo o al ribasso. Lo scopo varia secondo le esigenze della congiuntura ed alle direttive di politica monetaria fissate dalla banca centrale. Le equazioni (17) nelle ipotesi qui contemplate non sono legate ad una politica piuttosto che ad un'altra.

11. *Rappresentazione continua.*

La teoria esposta può essere presentata in forma più sintetica ed elegante, rappresentando il tempo con una variabile *continua*. In questo intento alla successione discreta 1, 2, ... n, quale è stata considerata al n. 2 dobbiamo sostituire una successione continua in cui il tempo, indicato genericamente con la variabile t è supposto variare con continuità da un istante iniziale o ad un istante finale ω.

Le incognite prima rappresentate dai termini delle successioni (1), (2), (3), si riassumono allora nelle funzioni

$$i(t)\,,\quad x(t)\,,\quad y(t) \qquad 0 < t < \omega \tag{30}$$

e rappresentano:

$i(t)$ il saggio di interesse al tempo t;

$x(t)$ la velocità del flusso dei pagamenti (*o delle riscossioni se* $x < 0$), che l'operatore *generico* eseguisce al tempo t in relazione ad *operazioni di mutuo*;

$y(t)$ la analoga velocità relativa *ad operazioni di investimento.*

Sono poi supposte note in tutto l'intervallo considerato le funzioni

$$P(t)\,,\quad M(t) \tag{31}$$

che rappresentano

$P(t)$ il livello generale dei prezzi al tempo t;

$M(t)$ la velocità del flusso con cui la moneta bancaria è creata (*o distrutta se* $M < 0$) al tempo t.

Posto

$$\xi(t) = \frac{x(t)}{P(t)}, \quad \eta(t) = \frac{y(t)}{P(t)} \tag{32}$$

le equazioni (6) e (23) che rappresentano rispettivamente la condizione della equità matematica e la equazione degli investimenti divengono

$$\int_0^\infty P(t)\xi(t)e^{-\int_0^t i(s)ds}\,dt = 0\,, \quad \int_0^\infty F(\eta)dt = 0\,, \tag{33}$$

mentre la funzione (22) che rappresenta la ofelimità si trasforma nel funzionale

$$\int_0^\infty \Phi(\xi(t) + \eta(t))dt\,. \tag{34}$$

Ogni attore cerca di determinare le funzioni x ed y in modo da attribuire un valore massimo al funzionale (34) subordinatamente alla condizione che siano verificate le equazioni (33), per cui ripetendo passo per passo il ragionamento sviluppato nei precedenti nn. 4 e 5 si giunge alle equazioni

$$i(t) = -\frac{d}{dt}\left(\log\left(\frac{1}{P}\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right)\right) = -\frac{d}{dt}\left(\log\left(\frac{1}{P}\frac{\partial F}{\partial\eta}\right)\right). \tag{35}$$

Posto

$$\frac{P'(t)}{P(t)} = m(t)\,, \qquad j(t) = i(t) - m(t) \tag{36}$$

le (35) si scrivono

$$j(t) = -\frac{d}{dt}\left(\log\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right) = -\frac{d}{dt}\left(\log\frac{\partial F}{\partial\eta}\right). \tag{37}$$

Esse sono del tutto analoghe alle (29) e come quelle sono espressioni del principio marginale.

Le (37) costituiscono un sistema di due equazioni differenziali del primo ordine, che unitamente alle condizioni ai limiti (33) determinano le funzioni incognite ξ ed η e quindi x ed y come funzionali della funzione $i(t)$.

Determinate in tal modo le funzioni x ed y, relative a tutti gli operatori presenti sul mercato, otterremo l'equazione di *chiusura del circuito dei capitali*, esprimendo che deve esservi in ogni istante *equilibrio fra la domanda e la offerta risparmio.*

Con evidente significato dei simboli questa equazione si scrive:

$$\Sigma x(t) = M(t) \tag{38}$$

e determina la funzione incognita $i(t)$.

Sicchè in definitiva il sistema formato da (38) e dal gruppo di tutte le equazioni (33) e (37) *relative a tutti gli operatori* determina tutte le funzioni incognite del problema.

12. *Le forze d'inerzia del sistema.*

La rappresentazione continua non ha solo il vantaggio di rendere l'esposizione più semplice e più sintetica, ma ancora e sopratutto quello di chiarire le idee circa la natura del problema.

Essa invero pone in evidenza che la ofelimità dipende dal flusso del reddito futuro, ed è quindi un funzionale. Se questo è, sorge il dubbio che il procedimento applicato per determinare la condotta dei singoli non sia corretto, in quanto il problema di determinare la configurazione in cui un funzionale è massimo dovrebbe essere trattato come problema di calcolo delle variazioni e non quale problema di calcolo differenziale, come sulla falsariga del FISHER è stato fatto fin qui. La teoria conterrebbe allora una contradizione interna, derivante dall'errore di aver inquadrato un processo per sua natura dinamico in uno schema statico, atto a rappresentare al più un movimento stazionario.

Un istante di riflessione tramuta il dubbio in certezza. È invero ipotesi essenziale della teoria dell'equilibrio quella di considerare azioni economiche uniformemente ripetute, il che significa che le variabili, che definiscono la configurazione del sistema sono considerate invarianti rispetto al tempo. Ora questa ipotesi viene meno nello schema qui considerato, perchè evidentemente questo perderebbe tutto il suo contenuto, se si ponesse

$$i_2 = i_3 = \ldots = i_{n-1}$$
$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n$$
$$y_1 = y_2 = \ldots = y_n\,.$$

La contradizione esiste quindi effettivamente.

Per eliminarla occorre modificare opportunamente lo schema teorico e precisamente introdurre le varianti seguenti:

a) alla formula (34) sostituire come espressione della ofelimità

$$\int_0^\omega \Phi(\xi(t) + \eta(t)\,, \quad \xi'(t) + \eta'(t))dt \tag{39}$$

in cui ξ', η' sono le derivate di ξ, η rispetto a t.

Con questa sostituzione veniamo ad ammettere che la ofelimità dipende non solo dal livello del reddito, ma anche dalle sue variazioni. É invero manifesto che queste variazioni si riflettono sulla nostra coscienza ed il riflesso è in senso favorevole se esse tendono all'aumento; in senso contrario, se tendono alla diminuzione. Il riflesso delle variazioni in atto esprime *l'attaccamento alle abitudini*; quello delle variazioni in fieri le *speranze ed i timori* dell'avvenire. In tal modo il presente è legato al ricordo del passato ed alle prospettive dell'avvenire, sicchè i vincoli che ne derivano sono espressione di forze che possono esser dette d'*inerzia*.

b) alla formula (33) — a destra — *sostituire* come *equazione degli investimenti*

$$\int_0^\omega F(\eta(t)\,, \quad \eta'(t))dt = 0 \tag{40}$$

in cui η' è la derivata di η rispetto a t.

Con questa sostituzione si viene a postulare che le diverse possibilità che si presentano nella scelta degli investimenti si riflettono non solo sulla *velocità* del flusso del reddito, ma anche sulla sua *accelerazione*: la dipendenza è quindi espressione delle resistenze, che si incontrano per allargare o restringere gli investimenti ed in generale per modificare in qualsiasi senso lo svolgimento del processo produttivo: anche queste sono *resistenze d'inerzia*;

c) *intendere* il principio del massimo di ofelimità nel senso del *calcolo delle variazioni.*

Precisamente:

detti t_0 e t_1 due istanti qualsiasi;

detta *stazione di partenza* la coppia dei valori che le funzioni $\xi(t)$, $\eta(t)$ assumono per $t = t_0$;

detta *stazione di arrivo* la coppia dei valori che le stesse funzioni assumono per $t = t_1$;

il principio del massimo di ofelimità deve essere inteso nel senso che *fra tutte le funzioni* $\xi(t)$, $\eta(t)$; che, muovendo da una stessa stazione di partenza e giungendo ad una stessa stazione di arrivo, verificano indenticamente a (40) ed alla prima — a sinistra — della (33), il soggetto sceglie quello *che attribuisce valore massimo al funzionale* (39).

Con queste ipotesi, applicando sviluppi notissimi nel calcolo delle variazioni si giunge alle formule

$$(41) \qquad i - m = -\frac{d}{dt}\left(\log\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi'}\right)\right)\right)$$

$$(42) \qquad i - m = -\frac{d}{dt}\left(\log\left(\frac{\partial F}{\partial \eta} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \eta'}\right)\right)\right)$$

che sostituiscono le (37), alla quale si riducono nel caso particolare che le funzioni Φ ed F non dipendono dalle derivate ξ', η'.

Le (41) esprimono il principio marginale, quale si presenta in un processo dinamico, in cui livellamento al saggio di interesse reale si attua con un divario, che è espressione delle forze d'inerzia del sistema.

Esse costituiscono un sistema di due *equazioni differenziali del terzo ordine*, che unitamente alla prima (a sinistra) delle (33) ed alla (40) determinano le funzioni incognite $\xi(t)$, $\eta(t)$, quando sono noti ulteriormente:

α) i valori che ξ, η e le loro derivate ξ', η' assumono nell'istante iniziale ($t = 0$);

β) i valori che i (*saggio di interesse*) e P *livello dei prezzi*) assumono in tutto l'intervallo considerato e cioè da $t = 0$ a $t = \omega$.

Immaginando così determinate *tutte* le funzioni ξ, η che rappresentano la condotta dei singoli operatori, sostituendo le espressioni che ne risultano nella (38), *che resta inalterata*, otteniamo una equazione integrale che determina in ogni istante il saggio di interesse i come funzionale della funzione $P(t)$.

13. *Il peso degli impegni preesistenti.*

Al n. 2 abbiamo rilevato che la condizione della equità matematica nella forma in cui è stata scritta dal FISHER e che finora è stata qui conservata non può essere accettata se non come ipotesi teoretica, fondata sulla presunzione che i diversi saggi di interesse, corrispondenti alle singole operazioni di mutuo, che sono in essere contemporaneamente per uno stesso operatore, siano ora superiori ora inferiori al saggio di mercato *pro tempore*, e che nel complesso gli scarti si compensino a vicenda. Abbiamo anche detto che questa ipotesi non aderisce alla realtà se non in via largamente approssimativa e che era da noi accettata per evitare le complicazioni analitiche, che sarebbero derivate dalla sua eliminazione.

É venuto adesso il momento di accennare a queste complicazioni e di mostrare come esse possano essere superate.

In questo intento abbandoniamo l'ipotesi in parola ed in sua vece ammettiamo che il saggio di interesse, in base al quale è calcolato il cumulo degli interessi composti agli effetti della equità matematica resti costante per tutta la durata del mutuo e sia pari al saggio di mercato, quale era all'*istante in cui il mutuo fu stipulato*. Ne viene allora come conseguenza che le quote pagate o riscosse al tempo t in relazione ad una operazione (di mutuo) stipulata al tempo $s < t$ debbono essere considerate funzioni di entrambe le variabili s e t. Ciò porta che alla funzione $x(t)$, che a norma della formula (30) rappresenta la velocità del flusso dei pagamenti al tempo t, dobbiamo sostituire — agli effetti delle operazioni di mutuo — una funzione $x(s, t)$ che rappresenti la velocità del flusso dei pagamenti eseguiti al tempo t, in forza di contratti stipulati al tempo $s < t$.

Consideriamo allora le operazioni (*di mutuo*) che un operatore generico ha in essere al tempo t e diciamo t_0, t_1 i termini estremi verso cui esse si estendono rispettivamente verso il passato e verso il futuro. Le operazioni relative corrisponderanno allora ai valori che la funzione $x(s, t)$ assume (*v. fig.*) nei punti interni al triangolo

MPQ e la condizione della equità matematica *per le operazioni stipulate al tempo s* è

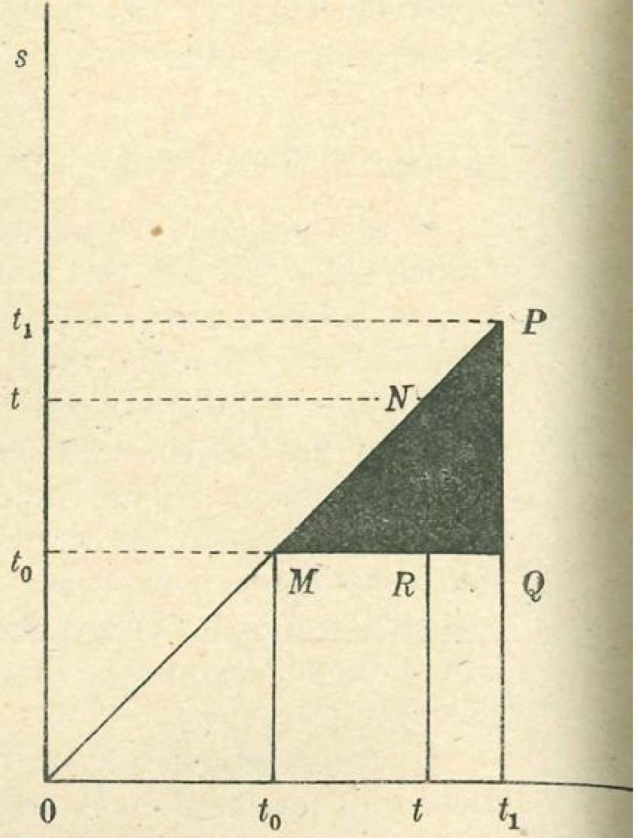
$$\int_s^{t_1} x(s, t) e^{-t\, i(s)}\, ds = 0$$

ovvero

$$\int_t^t P(t) \xi(s, t) e^{-t\, i(s)}\, ds = 0 \tag{43}$$

avendo posto

$$\xi(s, t) = \frac{x(s, t)}{P(t)}\,. \tag{44}$$



Analogamente la espressione della ofelimità è

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \int_t^{t_1} \Phi(\xi + \eta, \xi_1, \xi_2 + \eta')\, ds\,, \tag{45}$$

avendo posto per semplicità

$$\xi_1 = \frac{\partial \xi}{\partial s}\,, \quad \xi_2 = \frac{\partial \xi}{\partial t}\,, \tag{46}$$

fermo restando che η' indica la derivata di η rispetto a t.

Nella ipotesi:

a) che la funzione $\xi(s, t)$, vincolata a verificare a (43) assuma valori assegnati al contorno del triangolo MPQ;

b) che la funzione $\eta(t)$ vincolata a verificare a (40) assuma valori assegnati nei due punti M e Q,

la condizione di massimo per l'integrale (45) porta alla equazione euleriana

$$i - m = -\frac{d}{dt}\left\{ \log\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1} - \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_2}\right)\right)\right\} \tag{47}$$

che sostituisce (41). Resta ferma invece (42).

La (47) è una equazione alle derivate parziali *del terzo ordine* nella funzione ξ (s, t) ed alle derivate ordinarie sempre nel terzo ordine nella funzione $\eta(t)$ ed il problema di determinare le condizioni che ne individuino un integrale non è facile.

Se, come ritengo probabile, la conoscenza dei valori di ξ, ξ_1, η lungo tutto il tratto RQ (v. fig.), unitamente al vincolo della equazione (43) determina ξ nell'area interna al trapezio $NPQR$, allora il sistema delle equazioni (40), (42), (43), (47) determinano le funzioni $\xi(s, t)$, $\eta(t)$ nell'area interna al trapezio ora indicato, quando sono noti:

a) i valori che la funzione $\xi(s, t)$ e la sua derivata normale ξ assumono lungo tutto il tratto RQ (*posizione iniziale, direttive di marcia ed impegni preesistenti*);

b) i valori che la funzione $\eta(t)$ e la sua derivata $\eta'(t)$ assumono nel punto M (*posizione iniziale e direttive di marcia*);

c) i valori che le funzioni $i(t)$, $P(t)$ assumono lungo il tratto MN.

In tal modo ξ ed η si esprimono come funzionali di i e di P e resta fermo che sostituendo nella (38) si ottiene una equazione integrale che determina i (*saggio di interesse*) lungo tutto il tratto RQ in funzione dei valori che P (*livello dei prezzi*) assume nello stesso tratto.

14. *Conclusioni.*

Riferendoci al riepilogo di cui qui al n. 8, riassumiamo i risultati cui siamo giunti nel corso della presente ricerca.

1°. Nel sistema fisheriano è implicito che le banche sono considerate come operatori, la cui condotta è determinata dal principio marginale. Siffatta rappresentazione è contraditoria coll'azione che le banche stesse effettivamente esercitano sul mercato e che si riassume nei criteri con cui esse concedono il credito.

La contradizione si elimina sottraendo alle banche la qualità di operatori generici; sostituendo alle (15) — come espressioni della condizione di chiusura del circuito — le equazioni (17).

2°. Nelle equazioni fisheriane è ancora implicita la ipotesi che il valore della moneta sia stabile.

La restrizione è formale e si elimina facilmente introducendo una nuova serie di variabili che rappresentano il movimento del livello dei prezzi, e portando queste variabili nelle espressioni che definiscono la ofelimità e la equazione degli investimenti.

Ne viene di conseguenza che il principio marginale deve essere modificato nel senso che nel relativo enunciato al saggio di interesse nominale deve essere sostituito il saggio di interesse reale. Le equazioni (29) esprimono la nuova formulazione.

3°. La rappresentazione matematica assume forma più sintetica ed elegante, se il tempo viene pensato come variabile *continua*.

In questa rappresentazione il principio marginale è espresso da un sistema di due equazioni differenziali del primo ordine — indicate nelle formule (37) — che insieme alla condizione della equità matematica ed alla equazione degli investimenti determina la condotta dei singoli operatori.

La chiusura del circuito è espressa a sua volta dalla equazione (38), che determina il movimento del saggio di interesse $i(t)$.

4°. La rappresentazione fisheriana contiene una contradizione interna, che consiste essenzialmente nell'errore di inquadrare in uno schema stazionario un processo dinamico, per sua natura variabile. La contradizione si elimina introducendo la considerazione delle *forze d'inerzia* del sistema, che nei riguardi dei singoli operatori operano nella triplice forma di attaccamento alle abitudini; di speranze e di timore per l'avvenire; di resistenze interne all'investimento (od al disinvestimento) dei fattori produttivi.

Sotto l'aspetto matematico la considerazione delle forze d'inerzia del sistema implica la necessità di pensare la ofelimità come un funzionale dipendente non solo dalla velocità, ma anche dalla accelerazione del flusso del reddito; ed analogamente pensare la equazione degli investimenti come un legame funzionale dipendente dalla velocità e dalla accelerazione del flusso degli investimenti medesimi. In conseguenza il problema fondamentale del massimo di ofelimità si deve trattare come un problema di calcolo delle variazioni: le relative equazioni euleriane esprimono il principio marginale e sono qui equazioni differenziali alle derivate ordinarie del terzo ordine, come è indicato nelle formule (41).

5°. Nei confronti della equità matematica, l'inerzia del sistema agisce ancora come rispetto degli impegni in corso, per effetto dei quali ogni singola operazione resta vincolata per tutta la sua durata al saggio di interesse, quale era all'atto in cui il contratto fu stipulato.

Per tener conto di questo legame bisogna che la quantità che rappresenta la velocità del flusso dei pagamenti — nelle operazioni di mutuo — sia considerata funzione di due tempi: dell'istante generico, in cui l'operazione è considerata e dell'istante in cui fu stipulato il relativo contratto. La rappresentazione della ofelimità diventa più complessa, come è indicato dalla formula (45) ed il principio marginale è rappresentato da un sistema di equazioni alle derivate *parziali* del terzo ordine.

FORME DI RISPARMIO COLLEGATE ALLA ASSICURAZIONE SULLA VITA UMANA

PAOLO MEDOLAGHI

1. — Le forme di risparmio che oggi ci si presentano collegate alle assicurazioni sulla vita umana sono di varia specie, come varia è stata la loro fortuna nel passato; e sarà forse anche nell'avvenire.

Farne la storia e segnare con indici di facile interpretazione il prevalere, a seconda dei tempi e dei luoghi, or dell'una or dell'altra forma di risparmio, e sopratutto ricercarne le ragioni, collegandole ad altri fatti della vita economica e sociale, sarebbe impresa non priva di interesse e di utilità e che ha tentato non pochi, ma ha condotto finora a scarsi risultati.

Sopratutto un siffatto studio potrebbe aiutarci nelle previsioni intorno alle future tendenze che si svilupperanno nelle assicurazioni sulla vita umana. Esiste una evoluzione in atto per tale assicurazione? A me pare di ravvisarla in alcuni fatti, ma è così lenta quando se ne misuri il movimento con il metro della vita umana che può sfuggire alla comune osservazione.

Per riscontrarne la esistenza e scoprirne la direzione bisogna volgere lo sguardo indietro, scoprire i caratteri differenziali tra il presente e il passato, e cercarne la spiegazione. Se questa ci apparirà tale che anche altri indizi della vita d'oggi giorno la confermino, dandoci la impressione di un movimento secolare potremo senza eccessiva audacia avventurarci in una previsione degli sviluppi futuri.

In ogni caso, e farne un breve cenno è lo scopo assai più modesto di questo scritto, vi sono problemi nuovi che si affacciano a proposito delle mete che si propongono alla assicurazione vita, e problemi vecchi di un secolo che meritano di essere ripresi in esame ed affrontati con le risorse della attuale tecnica progredita e sopratutto con lo spirito dei nuovi tempi, protesi verso le più ardite realizzazioni.

2. — Nel IX Congresso internazionale degli attuari tenuto nel 1930 a Stocolma fu proposto, come oggetto di rapporti e di discussioni, un tema che ha qualche relazione con l'argomento sopra indicato, sebbene ne consideri un aspetto particolare. Il tema era così formulato: per quali ragioni l'assicurazione per la vita intera è stata soppiantata dall'assicurazione mista e quale è l'evoluzione probabile nell'avvenire? Che cosa si dovrebbe fare per far prevalere le forme di assicurazione più desiderabili? Problemi, come si vede, per i quali non si può dare torto al MANES che osservò essere gli economisti e i sociologhi, non meno degli attuari, qualificati per la loro trattazione.

Nel titolo abbreviato del tema proposto era una suggestione che fu raccolta da molti autori e deve avere non poco contribuito all'orientamento delle risposte e delle discussioni; il titolo abbreviato era: assicurazione di rischio contro assicurazione di risparmio e presentava quindi una antitesi che nella forma cruda in cui veniva esposta si sarebbe potuta prestare ad una discussione. Prima di occuparmi di questo, credo opportuno esporre nelle grandi linee alcuni dei dati statistici più significativi, e delle risposte che i partecipanti al congresso diedero al primo quesito: quelle date al secondo furono scarse e di poco interesse.

I confronti furono stabiliti tra due gruppi di osservazioni; da un lato quelle che si riferivano alle assicurazioni per la vita intera in tutte le sue forme (a premio unico, vitalizio e temporaneo), dall'altro quelle che si riferivano alle assicurazioni miste, di qualunque durata e con qualsiasi modo di pagamento dei premi. Non erano quindi considerate altre categorie di contratti nelle quali il risparmio si associa alla assicurazione, per esempio tutte quelle in cui entrano rendite vitalizie, nè le assicurazioni di capitali differiti, nè le altre numerose e complicate combinazioni offerte al pubblico, e che nelle statistiche sono comprese sotto denominazioni generiche, come «forme varie» e simili. Esse, allo stato attuale delle statistiche, nulla di essenziale avrebbero potuto conferire allo studio di cui si tratta e molto invece avrebbero tolto di chiarezza e semplicità.

Affinchè il confronto, esteso ad una serie di anni, tra due gruppi di contratti acquisti un significato preciso è necessario che ciascun gruppo sia costituito da elementi sufficientemente omogenei, e che tale omogeneità si conservi presso a poco costante nel tempo. Nel caso nostro tale condizione è solo mediocremente soddisfatta, specialmente nei riguardi della durata delle assicurazioni miste, ma ciò non infirma sensibilmente le conclusioni di carattere macroscopico, che sono le sole che ci interessano.

Prescindendo dunque da queste ed altre sottigliezze e volendo vedere in qual modo è variato nella successione degli anni e nei singoli Stati, il rapporto tra le assicurazioni sulla vita intera e le miste, ci si può riferire o all'importo delle somme assicurate a fine di esercizio, o alla produzione dell'anno, e in luogo delle somme assicurate ci si può riferire ai contratti stipulati, sia considerando quelli esistenti a fine esercizio, oppure quelli stipulati durante l'esercizio. Nelle tabelle che seguono è adottato il primo procedimento, cioè per ogni cento lire assicurate a fine di esercizio per il caso di morte sono indicate distintamente le percentuali riferentisi alle assicurazioni vita intera e alle miste. Soltanto per l'Australia le

Germania (Siepmann)
un gruppo di imprese tedesche.

Anno	Vita intera	Mista	Rapporto
1890	58,2	40,7	1,43
1900	35,3	63,3	0,56
1910	22,0	74,6	0,29
1920	11,5	63,9	0,14

Giappone (Miura)
tutte le società giapponesi.

Anno	Vita intera	Mista	Rapporto
1910	29,1	67,4	0,43
1920	11,1	85,9	0,13
1928	8,5	67,9	0,10

Australia (Elliott)
tutte le società australiane.

Anno	Vita intera	Mista	Rapporto
1907	38,0	62,0	0,61
1910	35,5	64,5	0,55
1920	33,1	66,9	0,50
1927	39,7	60,3	0,66

Svizzera (Urech)
tutte le società svizzere.

Anno	Vita intera	Mista	Rapporto
1890	68,5	30,4	2,25
1900	43,2	53,5	0,81
1910	23,4	72,7	0,32
1919	11,3	84,9	0,13

Stato di New York (Jackson)

A - *le principali impr. operanti nello Stato* B - *venti imprese rappresentative*

Anno	Vita intera	Mista	Rapporto	Vita intera	Mista	Rapporto
1900	67,7	23,7	2,85	70,7	23,7	2,14
1910	65,7	24,7	2,66	69,4	15,1	4,60
1920	70,9	19,7	3,60	75,–	14,2	5,25
1928	74,4	16,8	4,43	75,4	10,9	6,92

Nel prospetto A i dati si riferiscono al portafoglio a fine d'anno, nel prospetto B alla produzione ottenuta durante l'anno; è naturale pertanto che il movimento ascensionale che si riscontra nel primo prospetto risulti nel secondo assai più accentuato.

Finlandia (Wessell)
tutte le società finlandesi.

Anno	Vita intera	Mista	Rapporto
1892	77,9	17,4	4,47
1900	59,3	33,6	1,76
1910	38,6	55,5	0,70
1921	20,2	74,7	0,27

Inghilterra (Pollock)
tutte le società inglesi.

Anno	Vita intera	Mista	Rapporto
1897	81,–	19,–	2,26
1907	67,6	32,4	2,09
1922	49,3	50,7	0,97
1927	45,9	54,1	0,85

Danimarca (Pedersen)
tutte le società danesi.

Anno	Vita intera	Mista	Rapporto
1890	53,–	44,9	1,18
1900	31,9	64,8	0,49
1910	22,4	63,5	0,35
1920	14,9	69,4	0,21

percentuali si riferiscono anzichè alle somme assicurate al numero dei contratti esistenti a fine di esercizio. I rapporti della quarta colonna indicano il numero di lire assicurate, o di contratti stipulati, per la vita intera per ogni lira, o contratto, di assicurazione mista, e danno quindi la misura della preferenza del pubblico per l'uno o l'altro tipo di contratti.

Per l'Italia si hanno i seguenti dati dalle relazioni quinquennali dell'Istituto Nazionale delle Assicurazioni: essi si riferiscono ai capitali assicurati con la produzione annuale, e per questo e perchè comprendono un periodo più recente non sono comparabili con quelli delle tabelle precedenti:

Anno (1)	Vita intera (2)	Mista (3)	Altre forme (4)	Rapporto (2):(3)
1922	8,95	62,24	28,81	0,14
1925	6,78	63,67	29,25	0,11
1930	9,53	55,58	34,89	0,17
1936	6,—	53,—	41,—	0,11

il periodo di tempo preso in considerazione è troppo breve perchè se ne possa rilevare una qualche tendenza nel rapporto tra le assicurazioni vita intera e le miste; è notevole invece l'accrescimento della produzione nelle altre forme.

Le preferenze del pubblico in quasi tutta l'Europa si sono volte, come si vede, decisamente verso le assicurazioni miste, abbandonando la vita intera, che era stata la prima forma offerta dalle imprese di assicurazione, e forse anche per questo aveva conservato per qualche tempo la prevalenza. Il cambiamento è stato rapidissimo in alcuni Stati, come la Germania, la Svizzera, la Danimarca, la Finlandia (nel Giappone le origini della assicurazione vita sono troppo recenti per consentire un raffronto analogo a quello che si può fare nei paesi europei). Per effetto del cambiamento si è capovolta la situazione preesistente e la parte preponderante del portafoglio è passata dalla vita intera alle miste; restando però un margine generalmente crescente per le altre forme di contratti.

Nei paesi anglosassoni il fenomeno presenta caratteri alquanto differenti, e pieno di interesse è specialmente il movimento in direzione opposta a quella europea che si nota negli Stati Uniti d'America, e che qui è rappresentato dalle statistiche dello Stato di New York.

3. — La ricerca delle cause di variazioni così caratteristiche ha condotto ad alcuni giudizi comuni, oltre che alla segnalazione di alcune circostanze di carattere locale o contingente e perciò di secondaria importanza. Tra queste ultime meritano di essere segnalati i criteri irrazionali di tassazione vigenti in alcuni Stati e per effetto dei quali è stata creata una sperequazione di gravami fiscali tra le due forme di assicurazione. Tale è, per esempio, la ingiustizia fiscale che si lamenta negli Stati che includono nell'asse ereditario i capitali assicurati con le assicurazioni vita intera per l'applicazione della imposta di successione. In altri casi una sperequazione deriva dai criteri adottati per la distribuzione degli utili agli assicurati. Inoltre la supposizione che prevalse tra gli assicuratori — fino a che le ricerche statistiche di Karup sulla mortalità degli assicurati presso la Banca di Gotha, e quelle di altri attuari non ne ebbero dimostrata la infondatezza — che i rischi aggravati potessero essere assunti in assicurazione con minor pericolo per la impresa riducendo la durata dei contratti influì anch'essa a determinare un afflusso verso le forme miste di proposte che altrimenti si sarebbero forse avviate verso i contratti vitalizi. Maggior peso che a questa causa contingente si deve però attribuire alla selezione spontanea, cioè al fattore psicologico che fa apparire, a chi ha maggiori probabilità di sopravvivenza, preferibili i contratti che considerano, accanto al caso di morte, anche quello di sopravvivenza; selezione spontanea che trova conferma, pure essa, nelle già citate statistiche di Karup. Altre spiegazioni infine non trovano i pareri concordi e in verità non sembrano accettabili; tali sono quelle che attribuiscono agli agenti e produttori una attività tendente a spingere gli assicurati verso le forme miste, come quelle da cui essi trarrebbero maggior lucro; spiegazione che cade quando si osservi che il favore del pubblico si è volto alle miste anche quando e dove (si cita il caso dell'Australia) il sistema delle provvigioni era tale da renderle per i produttori meno vantaggiose delle assicurazioni per la vita intera. Piuttosto appare naturale supporre che la propaganda si sia indirizzata a preferenza verso quelle forme che l'esperienza indicava di più facile accoglimento sicchè il suo indirizzo sarebbe non la causa ma l'effetto di uno stato psicologico del pubblico che ha più profonde radici.

Queste, secondo l'opinione di molti, sono da ricercare principalmente nel bisogno di previdenza per la vecchiaia, che per le categorie non comprese nelle assicurazioni sociali obbligatorie e sprovviste di ogni altra difesa per la tarda età, può essere in qualche modo fronteggiato con le assicurazioni miste, specialmente se di lunga durata e con scadenza a 60-65 anni. Le statistiche mettono però in luce una tendenza alla riduzione della durata dei contratti, fino a farne cadere il termine ad età anche inferiore a 50 anni, tendenza che male si spiega con le preoccupazioni per la vecchiaia. A questo proposito il Siepmann osserva giustamente che nei contratti di assicurazione mista a breve durata lo scopo a cui dovrà essere destinato il capitale disponibile alla scadenza è generalmente, nelle intenzioni dell'assicurato, già fissato al momento della stipula; sarà l'acquisto di un immobile, o la estinzione di una ipoteca, o l'avviamento di un negozio, o la sistemazione professionale di un figlio; il movente insomma in questi casi ha spesso una concretezza maggiore che non la generica inclinazione al risparmio.

Significativo è il ravvicinamento tra i seguenti fatti: parallelamente, se pure con un certo sfasamento nel tempo, alla tendenza che ha condotto le forme miste a prevalere sulle assicurazioni vita si è sviluppata tra le prime la tendenza all'accorciamento della durata dei contratti, tendenza che alcuni, come Solberg, Cosmao Dumanoir, Wöllner ed altri, deplorano senza porsi la domanda se il secondo fenomeno non sia un derivato del primo, cioè provenga dalle stesse cause. Laddove, come negli Stati Uniti, il fenomeno principale ci si presenta invertito, e le assicurazioni per la vita intera anzichè perdere terreno ne hanno piuttosto guadagnato, anche il fenomeno secondario che riguarda la durata dei contratti di assicurazione mista risulta invertito, e una chiara preferenza si afferma per le lunghe durate.

Una stessa causa dunque agisce e determina l'uno e l'altro fenomeno, e crea le differenze or ora segnalate; essa risiede evidentemente nel modo diverso di considerare l'associazione del risparmio con l'assicurazione. Per quanto riguarda gli Stati Uniti la spiegazione che ne diedero gli americani che parteciparono al congresso sostanzialmente si basava sul confronto tra l'interesse che si realizza con il risparmio assicurativo e quello assai maggiore che l'uomo di media capacità può realizzare negli Stati Uniti con i propri investimenti diretti.

L'importanza del tasso di interesse in tutti i problemi che concernono l'assicurazione vita, in particolare anche nella scelta della forma di assicurazione, è intuitiva; è ovvio, per esempio, che la tendenza dell'interesse a decrescere, mentre conduce le imprese a rivedere le basi per le tariffe, rende meno appetibili le forme in cui la funzione della accumulazione prevale su quella puramente assicurativa. Il basso tasso di interesse non influisce sensibilmente sul flusso del risparmio che rimane disponibile ad ogni richiesta, deprime invece quello che nella assicurazione, senza coprire un rischio, si immobilizza e rimane per lungo tempo indisponibile (o disponibile con decurtazioni).

La spiegazione data è quindi plausibile; se ne può aggiungere un'altra ricordando che negli Stati Uniti le prime modestissime assistenze sociali furono a favore delle madri vedove o nubili o comunque prive del sostegno di un uomo; che inoltre, assai prima del Social Security Act, prima cioè che si sentisse il bisogno da parte dello Stato di preparare una pensione per la invalidità e la vecchiaia di chi lavora, la iniziativa privata era venuta incontro ai bisogni delle vedove e degli orfani, con quelle sue assicurazioni a gruppi che, per quanto imperfette, costituiscono pur sempre una forma di previdenza sociale. Tutto questo è dovuto, secondo il MANES, alla grande influenza della donna nella vita sociale americana, e a questa stessa influenza egli attribuisce la fiducia con la quale il capo di famiglia affida ad essa, con le assicurazioni per la vita intera, la cura di scegliere il migliore impiego per il capitale assicurato.

Vero è che questa fiducia non è sempre assoluta e che sono proprio caratteristiche degli Stati Uniti quelle disposizioni testamentarie che impongono talvolta il deposito del capitale negli Investiment-Trusts.

D'altra parte è appunto la sollecitudine per la famiglia, il desiderio di vedere, prima di morire, già realizzato per essa un sicuro e vantaggioso investimento, il timore di una svalutazione monetaria che annulli il frutto dei risparmi, l'incertezza insomma che grava sul futuro, in tanta vicissitudine di rapide trasformazioni economiche, che può giustificare la preferenza per le assicurazioni miste, più che ogni altra ragione, e sopratutto più che la prevalenza dei sentimenti egoistici su quelli altruistici, che alcuni vorrebbero affacciare come spiegazione.

4. — Forse i giudizi furono sviati da una impostazione del problema consistente nel contrapporre, nel confronto tra le varie specie di contratti, quantità anzichè qualità di risparmio.

La assicurazione per la vita intera non è anch'essa un risparmio? sarebbe assurdo negarlo! è anzi, sotto certi aspetti, sol che nella economia si assuma come unità la famiglia anzichè l'individuo, un risparmio perfezionato che a parità di rinunzie ai consumi dell'oggi prepara per l'avvenire il massimo rendimento. Ma per altre caratteristiche è un risparmio inferiore, che giustifica l'abbandono in cui è lasciato, specialmente in periodi di instabilità economica. Esso è normalmente per sua natura un risparmio indifferenziato, e a differimento indefinito, che presenta, fra tutti i contratti, a fronte delle variazioni del saggio di interesse e del potere di acquisto della moneta, il massimo rischio finanziario, sia per gli assicuratori come e più per gli assicurati, inducendo gli uni e gli altri a preferire gli impegni che non legano per troppo lungo tempo.

Se così è, e se sussistono ed operano ancora quelle cause che fecero in un primo tempo prevalere le miste sulla vita intera, e che successivamente hanno dato fra le miste la prevalenza alle brevi sulle lunghe durate, è da prevedere che il massimo favore del pubblico andrebbe, se difficoltà di altro genere non vi si opponessero, a quei contratti in cui non v'è più alcuna distanza di tempo tra l'inizio dell'atto di previdenza e l'uso anticipato della ricchezza che con tale atto si vuol procurare, in cui cioè l'emissione della polizza ed il realizzo dell'ambito investimento avvengono contemporaneamente.

Ciò può avvenire soltanto associando l'assicurazione ad una operazione di mutuo in cui la somma mutuata sia rimborsata dal debitore con versamenti reateali finchè egli è in vita, e interamente saldata per la parte residuale se muore prima del totale rimborso; i versamenti rateali comprendono in tal caso la annualità per l'estinzione del debito e il premio di assicurazione, e l'operazione assume spesso, anche quando la funzione del credito e quella della assicurazione sono riunite nello stesso ente, la veste matematica di una assicurazione mista, differendone però in ogni caso sostanzialmente per altri aspetti finanziari e per il contenuto economico. Nonostante i grandi sviluppi della tecnica delle assicurazioni sulla vita umana la teoria degli ammortamenti assicurativi presenta ancora problemi che non sono stati abbastanza studiati, e basti quì, tra gli altri, accennare, senza entrare in particolari tecnici, quello del saggio di interesse da applicare a tali operazioni, che implica la adozione di criteri differenti da quelli che valgono per le ordinarie assicurazioni. Mentre per queste ultime la impresa è raccoglitrice di risparmio, per le altre è distributrice di credito e il problema finanziario che deve risolvere non è di trovare un impiego per le riserve matematiche, ma di procurarsi delle disponibilità finanziarie, problemi complementari la cui coesistenza nel complesso del lavoro di una impresa fa intravvedere possibilità numerose di reciproci vantaggi.

La utilità teorica degli ammortamenti assicurativi per il pubblico dei risparmiatori, per le imprese di credito e di assicurazione che vi concorrono e infine anche per l'economia nazionale, sia che i mutui vengano contratti a scopi produttivi e quindi concorrano alla formazione di nuova ricchezza, sia che servano alla ricostruzione di quella perduta, sono ovvie, sono state già da molti ampiamente illustrate e non hanno bisogno di nuova dimostrazione.

Piuttosto è da osservare che le utilità restano teoriche, e non si trasformano in utilità pratiche, quando il costo delle operazioni diventa proibitivo, quando cioè pesano su di esso duplicazioni di gravami fiscali, duplicazioni di spese per provvigioni, e differenze troppo forti tra interessi attivi e passivi a carico dell'assicurato. A fronte di alcuni esempi di soluzioni ottimamente riuscite e coronate di largo successo, e di altre che hanno potuto sostenersi sol perchè sorrette dai pubblici poteri o da istituzioni di diritto pubblico con agevolazioni di carattere assistenziale, numerosi casi di iniziative fallite sul nascere o prima di nascere hanno ingenerato in molti la persuasione che in questo indirizzo poco ci sia da fare e da sperare, disanimando dal cercare le cause degli insuccessi e i modi di eliminarli e sbarrando la via a un corteo vasto e vario di operazioni.

5. — Certo molte difficoltà sono eliminate quando il mutuo e l'assicurazione sono assunte da uno stesso ente, o da enti finanziariamente collegati. Il problema degli ammortamenti assicurativi è uno di quelli che attendono una completa soluzione dalla costituzione di gruppi in cui siano collegati da stretti rapporti tecnici, amministrativi e finanziari istituti di credito e di assicurazione; esempi di configurazioni di questo genere sono, tra le antiche, quelle che nel Belgio e nella Francia hanno come istituti centrali le rispettive Casse Nazionali di risparmio e di pensione, le quali con gli enti di assicurazione e di credito collegati hanno

potuto affrontare i problemi degli ammortamenti assicurativi per l'acquisto di piccole proprietà, e tra le configurazioni recenti quelle che negli Stati del Massachusetts e di New York associano il risparmio alla assicurazione.

Quando è un unico istituto che fa da assicuratore e da mutuante, gli investimenti pei quali può essere concesso il credito sono soltanto quelli che la legge consente a copertura delle riserve matematiche, cioè gli acquisti di beni immobili e quelli di titoli, in particolare titoli di Stato o garantiti dallo Stato. In questo ultimo caso la operazione si semplifica se l'acquisto è fatto in proprio dalla società, con il patto che la somma assicurata sarà corrisposta alla scadenza del contratto nei titoli designati.

Tale è il sistema adottato con felice iniziativa e con largo successo dall'Istituto Nazionale delle assicurazioni e da alcune società private per favorire le sottoscrizioni dei buoni di tesoro novennali e quelle al prestito redimibile 5 % sulla proprietà immobiliare. In queste operazioni, per le agevolazion concesse, è stato possibile adottare la forma mista, associata in alcuni casi, e per una parte dalla somma assicurata, ad un vero e proprio ammortamento assicurativo.

Questo potrebbe essere adottato anche per l'acquisto di obbligazioni fondiarie per conto di chi, avendo contratto un mutuo presso un Istituto di credito fondiario e volendo approfittare di un forte ribasso delle obbligazioni, intendesse estinguerlo e sostituirlo con altro ad ammortamento assicurativo. Con gli oneri fiscali e gli altri di vario genere che oggi comporterebbe una tale trasformazione soltanto un forte ribasso delle cartelle la renderebbe praticamente conveniente; resta a vedere se la stabilizzazione automatica, entro ristretti confini, che ne conseguirebbe per il corso delle cartelle non presenti vantaggi sufficienti a giustificare la riduzione degli oneri sopraccennati alcuni dei quali hanno carattere di duplicazione.

6. — Più interessanti sono le assicurazioni connesse all'acquisto o alla conservazione della proprietà immobiliare.

L'idea di associare il risparmio alla assicurazione sulla vita allo scopo di acquistare una abitazione risale alla prima metà del secolo scorso; sembra infatti che i primi accenni alla utilità di una tale associazione si trovino in alcune pubblicazioni inglesi del 1846 e 1849, concernenti le Benefits building Societies.

Sta dunque per compiersi un secolo da che l'idea è sorta, secolo ricco di studi e di proposte che attestano l'interesse sempre attuale del problema, mentre però d'altra parte i molti progetti rimasti senza realizzazione, quelli pure numerosi che hanno avuto un principio di attuazione e sono poi caduti o intisichiti di fronte alle difficoltà incontrate nella pratica, e infine le stesse iniziative giunte in porto e che si reggono con un discreto successo non corrispondente tuttavia in generale alla importanza del bisogno cui vorrebbero andare incontro, dimostrano che vi è ancora molto cammino da fare, molti scogli da superare.

Forse l'interesse si è un po' spostato negli ultimi tempi dalle iniziative tendenti a conferire la casa in proprietà a quelle in favore delle case da costruirsi in serie dagli Istituti per case popolari e da concedersi in affitto, ma ciò non impedisce che anche l'altra soluzione sia da tenere presente, e che i problemi che vi si connettono risorgano ogni qualvolta il bisogno della casa si fa più vivo. Si riaffacciano allora, circondati di nuove speranze, progetti e iniziative che già naufragarono miseramente, per difetto di sufficiente preparazione.

Una esposizione assai accurata di tali vicende fino al 1930 è stata data dal dott. Rodolfo Blumenthal nel 51° fascicolo delle pubblicazioni della Associazione tedesca per la scienza delle assicurazioni. Nella grande varietà di soluzioni, scartate quelle che appaiono in generale meno convenienti, possiamo distinguere tre principali, dalle quali tutte le altre derivano. Per averne una chiara idea è preferibile riferirsi al caso in cui l'istituto mutuante è diverso da quello assicuratore, ed il mutuo è ad ammortamento graduale. L'assicurazione garantisce allora, nel caso di morte del debitore durante il periodo di ammortamento, soltanto il rimborso del debito non ancora ammortizzato; è quindi una assicurazione temporanea di capitale descrescente e si possono immaginare tre modi di pagamento del premio:

a) premio unico. È questa la forma che ha incontrato maggiore successo; ne troviamo interessanti applicazioni in Inghilterra, in Francia e nel Belgio. Il premio unico di assicurazione è pagato inizialmente dal debitore assicurato, o, come talvolta avviene nella costituzione di piccole proprietà promossa e assistita dallo Stato, è aggiunto alla somma mutuata e si ammortizza con essa. Presuppone negli altri casi che l'aspirante alla proprietà possa disporre già di qualche modesto risparmio, se non altro per pagare il premio unico.

b) premio naturale. La nostra legge per la vigilanza sulle imprese di assicurazione non ammette, come è noto, le assicurazioni a premio naturale; ma quando si tratta, come nel caso nostro, di assicurazioni temporanee e per un capitale decrescente, le ragioni che giustificano la esclusione non sussistono e il divieto dovrebbe essere tolto. Fu questa la prima soluzione ideata in Germania; essa presenta l'inconveniente, che però con piccoli espedienti potrebbe essere eliminato, dei premi variabili di anno in anno, cioè crescenti in un primo periodo e poi decrescenti. Tale soluzione è ritenuta più adatta nel caso di assicurazioni a gruppi; per esempio in Germania si presta bene nei rapporti con le Casse di risparmio edilizie.

c) premio annuo; il maggiore ostacolo alla adozione di questa forma è costituito dalle riserve negative che si affacciano nel corso della operazione e che per la impresa di assicurazione rappresentano un rischio inaccettabile. Si è pensato di eliminarlo in vari modi o aumentando il premio di primo anno o accorciando il periodo di pagamento dei premi, o riducendo la durata del contratto di assicurazione in confronto alla durata del mutuo.

Caratteristica comune delle precedenti soluzioni è la costituzione presso l'istituto mutuante del fondo per la estinzione del mutuo, mentre, tranne nella prima soluzione, non si ha costituzione di riserve matematiche presso l'istituto assicuratore. Ne segue che ai versamenti dell'assicurato per la parte di premio eccedente la copertura del rischio è accreditato l'interesse ad un tasso generalmente eguale a quello del mutuo. Deriva specialmente da ciò la preferenza che viene data a tali soluzioni in confronto a quelle che poggiano sulle ordinarie assicurazioni miste.

Non fa meraviglia pertanto trovare che, nel Belgio, presso la Cassa nazionale di assicurazioni per il caso di morte, che è l'organo specifico a cui la legge attribuisce la funzione assicuratrice a garanzia dei mutui per la costruzione e l'acquisto delle case economiche, la situazione delle assicurazioni esistenti al 31 dicembre 1938 era:

Miste a capitale fisso	migliaia di frs.	30.435
Temporanee e a capitale decrescente	migliaia di frs.	1.921.544

Le società di credito per case economiche, collegate alla Cassa Nazionale predetta, avevano alla stessa data concesso 229.800 mutui per un totale di circa 3 miliardi e mezzo.

7. — Una importante funzione può essere assunta dalla assicurazione sulla vita per la formazione e la conservazione della piccola proprietà coltivatrice. Mi limito però ad accennare soltanto ad un problema particolare che riguarda la conservazione della piccola proprietà che sorge a cura degli enti di colonizzazione o dei consorzi nei comprensori di bonifica e che quindi, potendo beneficiare di molti aiuti dello Stato e degli enti stessi, si trova in generale in condizioni più favorevoli dell'altra proprietà che sorge spontanea per virtù di risparmio volontario, talvolta anche essa però con un carico di debiti.

La provvida legge del 3 giugno 1940 n. 1078 ha sancito la indivisibilità delle unità poderali a conduzione diretta costituite in comprensori di bonifica, ma non ha accolto il principio della trasmissibilità del podere ad un unico erede, e per conseguenza non ha posto ostacoli al riassorbimento della piccola proprietà in proprietà maggiori.

Infatti, estinto il debito verso l'ente di colonizzazione e morto, senza lasciare altri beni, il primo assegnatario, chi gli succederà nella conduzione del fondo dovrà far fronte agli obblighi verso i coeredi, sia con il godimento del fondo in comunione con essi, sia con il pagamento delle quote ereditarie. La legge consente in questo ultimo caso che egli si sdebiti in un periodo non superiore a dieci anni, con pagamenti rateali comprensivi dell'interesse legale; essa prevede anche il pagamento in unica soluzione mediante l'assunzione di un mutuo ed in questo caso concede ai mutui, purchè stipulati presso gli istituti all'uopo autorizzati, i benefici tributari connessi alle operazioni di credito agrario di miglioramento, ma non il contributo statale nel pagamento degli interessi.

Queste concessioni non potranno impedire che il maggior peso, un peso insostenibile, cada sulle famiglie più numerose; non potranno impedire che in un grande numero di casi agli eredi non si presenti altra via d'uscita che la vendita del fondo. Così anche nella migliore delle ipotesi in cui il nuovo acquirente sia un coltivatore diretto, sarà spezzata quella continuità di conduzione familiare che, legando l'uomo alla terra con il vincolo dei ricordi, delle tradizioni, degli affetti, ha un suo altissimo, innegabile valore materiale e morale.

Che l'eventualità della alienazione sia per ora relativamente remota non toglie che se ne debba tener conto, tanto più considerando il magnifico sviluppo demografico che si osserva nelle nuove unità poderali e che rende il pericolo maggiore; remota è la eventualità, ma non certo impossibile, anzi potremmo dire per molte di esse quasi sicura se non interviene un rimedio.

È noto che l'intervallo devolutivo a titolo gratuito della proprietà terriera è di circa 31 anni, e che l'incremento annuale della popolazione italiana è di circa 8.3 per mille; ne segue che a 100 capi famiglia corrispondono circa 260 discendenti diretti, risultato che trova riscontro in quello dei censimenti secondo i quali il numero medio dei figli per famiglie con prole è per i piccoli proprietari agricoli di circa 2,7. È probabile, e alcuni indizi tenderebbero a confermarlo, che nelle nuove proprietà la media sia alquanto più elevata. In media dunque ogni assegnatario della seconda generazione si troverà ad avere verso i coeredi un debito corrispondente a non meno del 60 per cento del valore del proprio fondo, e ve ne sarà un numero non indifferente, in media 26 casi ogni cento, per i quali il debito raggiungerà o supererà i tre quarti del valore del fondo. Ciò nel caso in cui il debito verso l'ente di colonizzazione o il consorzio sia già stato interamente pagato; chè se la successione ha luogo prima che ciò avvenga, anche il debito verso l'ente, per la parte non ammortizzata, sarà da aggiungere al debito verso i coeredi.

L'assicurazione sulla vita del primo assegnatario si può inserire in due modi differenti a sollievo di tale situazione, secondo che sia diretta a liberare il fondo dal debito verso l'ente o da quello verso i coeredi; modi differenti e differentemente efficaci. Nel primo caso l'assicurazione è temporanea a capitale decrescente; il capitale assicurato è eguale infatti alla parte rimasta da ammortizzare del debito verso l'ente. Una tale assicurazione, anche se aggruppata con altre dello stesso tipo e circondata dalle necessarie cautele, è intrinsecamente individuale in nulla differendo da un ordinario ammortamento assicurativo; più che a sollievo dell'assegnatario del fondo è a vantaggio e a garanzia dell'ente mutuante. Ben diverso carattere tecnico, e sopratutto ben diversa portata economica e sociale ha la seconda soluzione. Con essa, dovendosi tacitare i coeredi, il capitale da assicurare corrisponde non già alla parte del debito che resta da ammortizzare verso l'ente di colonizzazione o il consorzio di bonifica, ma ad una frazione di quello già ammortizzato; è una assicurazione per la vita intera, per un capitale crescente durante tutto il periodo dell'ammortamento del debito verso l'ente e da indi in poi costante nella misura massima dipendente dal numero dei coeredi, e che in media, come si è visto, è eguale a circa il 60% del valore del fondo.

Diversa è anche, conseguentemente, la organizzazione che dovrebbe essere data ad una tale previdenza: piuttosto che una assicurazione facoltativa, a premio individuale, differente per le diverse età e situazioni familiari, sarebbe preferibile una assicurazione obbligatoria e collettiva nel significato proprio di questa parola, cioè prescindente dalle singole condizioni individuali di età e di famiglia, le quali sarebbero prese in considerazione solo per giungere alla determinazione di un premio unitario medio da applicarsi al valore dei fondi. Obbligatoria dovrebbe essere a preferenza l'assicurazione poichè tale è il carattere che conviene conferire alla assicurazione quando anzichè l'individuo si assuma come unità la famiglia. Nel caso nostro qualora, conservando il premio medio, l'assicurazione fosse facoltativa, è chiaro che se ne terrebbero fuori le coppie meno prolifere, e ne verrebbe accresciuto il costo per le altre; mentre d'altra parte la rinunzia al premio medio porterebbe altre complicazioni, aggravando notevolmente il costo per i padri di numerosa prole e obbligando a frequenti revisioni di premio, al variare delle condizioni familiari.

Bastano questi accenni per far comprendere come la seconda soluzione, allontanandosi dalle vie solitamente battute, debba superare, oltre la diffidenza verso le cose nuove, anche alcune effettive ma non essenziali difficoltà di ordine tecnico, e sopratutto alcune pregiudiziali dottrinarie come quella che si potrebbe opporre alla obbligatorietà della assicurazione. Ma contro ad ogni ostacolo dovrebbe prevalere il vantaggio che essa presenta di allontanare, con un costo annuo non eccessivo, che si può valutare tra l'uno e l'uno e mezzo per cento del valore della proprietà, quella grave preoccupazione sulla sorte riserbata alle unità poderali, per i trapassi ereditari. Senza entrare in dettagli tecnici può essere tuttavia opportuno avvertire che in una siffatta assicurazione vi è un rischio demografico, che non è soltanto quello della probabilità di morte, ma anche quello che deriva dalle previsioni assunte intorno al numero medio dei figli alla morte del padre; mentre vi è poi evidentemente la possibilità di eliminare il rischio finanziario mediante accordi con l'ente mutuante intesi a far sì che l'interesse di applicare alle riserve matematiche corrisponda a quello del mutuo.

I RISCHI CATASTROFICI E I RISCHI DI GUERRA NELLE ASSICURAZIONI CONTRO I DANNI

Bruno de Mori

Nel rapido e vario corso della vita, il rischio è caratterizzato da un « evento casuale » che produce danni alle cose, alle persone, agli interessi.

Questa è una configurazione tecnica che introduce il concetto, di ordine probabilistico, dalla casualità.

Sotto il profilo giuridico, il richio si collega al verificarsi del « caso fortuito » e della « forza maggiore » che producono il danno.

Il *risparmio*, la *mutualità degli esposti al rischio*, l'*assicurazione* sono i mezzi che, nel tempo, gli interessati hanno predisposto per soddisfare al « bisogno » che si manifesta nell'avversa occasione e che si concreta nella necessità di ripristinare economicamente le conseguenze del danno.

L'assicurazione è, oggi, il sistema normale con cui si effettua il « risarcimento » dei danni che colpiscono le persone (infortuni, malattie) o il patrimonio delle persone (danni alle cose, avvenimenti che colpiscono gli interessi e le responsabilità).

Il « rischio » si manifesta nelle forme più varie; l'evento dannoso può incidere con estensione e gravità anche impensate. Di fronte a questa enorme gamma di « avvenimenti » è logico porsi la domanda se tutti i rischi che si presentano nello svolgersi della vita civile possano formare oggetto di assicurazione, intesa quest'ultima come fenomeno di ordine commerciale soggetto alle imprescindibili necessità della « azienda assicuratrice ».

La condizione pregiudiziale è stata già posta: la casualità. Essa è fondamentale, anzi, decisiva. L'evento dannoso (l'alea) deve esser legato alle cosiddette « leggi del caso » che sono, in realtà, sconosciute o poco conosciute ma che pur muovono, quasi misteriosamente, quelle cause, di varia natura, di varia entità, di varia direzione, che determinano l'avvenimento. In sostanza, l'evento deve essere *indipendente dal fatto dell'uomo*, ancor più, *dalla volontà dell'uomo*. Deriva da ciò l'esame dell'influenza dei « fattori soggettivi » e del limite entro cui questa influenza può essere compatibile con l'assicurazione.

Realizzata la pregiudiziale del « fortuito », l'assicurabilità dei rischi estranei al puro fenomeno naturale della vita umana, è normalmente da considerarsi connessa alle seguenti condizioni:

1°) che gli eventi dannosi siano *indipendenti*; cioè che il verificarsi dell'uno non porti al verificarsi dell'altro o, quanto meno, non contribuisca oltre un certo grado al detto avverarsi (accumulazione di danni; propagazione della causa dannosa);

2°) che i rischi costituenti un determinato « campo » siano *omogenei*. L'omogeneità è intesa nel senso qualitativo e nel senso quantitativo. Lo studio approfondito di tale condizione conduce all'esame degli « attributi » comuni ai varî rischi e al limite della divergenza compatibile per ciascuna classe (teoria del MEDOLAGHI);

3°) che esista una massa sufficientemente ampia di rischi considerati omogenei, giacchè le leggi fondamentali del calcolo di probabilità (applicabili — come norma — anche nelle assicurazioni contro i danni) ci dicono che l'aspettativa di un certo equilibrio tecnico — necessaria all'esercizio industriale dell'Azienda assicuratrice — si può raggiungere solo, con la compensazione, attraverso un numero sufficientemente vasto di esperienze, cioè di un quantitativo sufficientemente ampio di rischi.

In base a questi capisaldi di ordine teorico (che ho creduto di riportare brevemente perchè chiariranno meglio le considerazioni che in appresso esporrò) è stata organizzata l'assicurazione contro i danni per *grandi rami di lavoro* che si riferiscono agli eventi che colpiscono le « cose » per lo scatenarsi degli elementi della natura (incendio, avvenimenti marittimi, grandine) o che riguardano le persone per disgrazie accidentali o responsabilità di cui possono essere colpite.

È naturale, a questo punto, formulare un altro quesito: se, cioè, nell'ambito di un campo assicurabile (insieme di rischi nel quale è stata riconosciuta l'applicabilità delle leggi probabilistiche) *tutti* i danni siano indennizzabili, *qualunque la causa del loro avverarsi*, oppure se la determinazione della « casuale » porti ad una discriminazione del « *danno risarcibile* ».

È evidente che il danno può essere imputabile a *fatto dell'uomo in dipendenza di dolo, di colpa* (in tutte le sue gradazioni) di *negligenza.* Se l'azione positiva o l'attitudine negativa si riferiscono all'assicurato, l'esonero di responsabilità da parte dell'assicuratore, nei limiti di diritto e di legge, discende dalla definizione stessa del contratto.

Ma anche nel dominio delle cause estranee all'assicurato non è possibile non distinguere il danno che deriva dall'incidenza normale del caso, da quello che trova la sua origine, diretta o indiretta, in *avvenimenti eccezionali*, in genere ben determinabili, imponenti nei loro effetti, saltuari nel loro verificarsi, indifferenti ad ogni tentativo di costruirne una legge di ricorrenza.

L'eccezionalità della causa induce, di regola, l'assicuratore a dichiarare contrattualmente *la non risarcibilità dei relativi danni.* Salvo esplicito patto in contrario, le polizze di assicurazione contro i danni di tutto il mondo recano la clausola di esonero dall'obbligo del risarcimento dei sinistri imputabili a fatti che, con termine comprensivo, *possiamo definire « catastrofici »*.

La natura « catastrofica » è caratterizzata da due fattori sostanziali: la *grandiosità del sinistro probabile*; la possibilità di *accumulazioni*, anche notevoli, di sinistri nello stesso spazio e nello stesso tempo.

La sola enunciazione di questi caratteri salienti giustifica — in base a quanto esposto sulla configurazione tecnica ordinaria di un campo assicurabile — l'atteggiamento negativo assunto dagli assicuratori di fronte alla copertura di tali rischi. In luogo di una normale distribuzione degli « scarti » intorno alla media (coefficiente di probabilità) si manifestano asimmetrie eccezionali, del tutto sproporzionate alla superficie del diagramma (massa dei premi); in luogo di una « ripartizione », la più estesa possibile, in luogo di una « indipendenza » la più accentuata possibile, si verifica un *accentramento di danni*, una *connessione di avvenimenti* influenti dannosamente gli uni sugli altri. Raffigurandoci il quadro terrificante di un terremoto o di un'eruzione vulcanica, di una inondazione o di una distruzione conseguente a fatto di guerra, ci rendiamo immediatamente conto delle caratteristiche generalmente considerate come « anti-assicurative » di siffatte calamità.

Gli eventi di natura eccezionale o catastrofica che costituiscono causa di esonero dalle responsabilità di risarcimento da parte dell'assicuratore, possono raggrupparsi in due grandi categorie:

a) *fatti naturali* di speciale imponenza o, addirittura, compresi nei *cataclismi* della terra, del cielo, dell'aria;

b) *fatti dell'uomo* dipendenti o connessi ai grandi *eventi storici della guerra*, delle ribellioni, dei moti civili, delle rivoluzioni.

Evidentemente, vi è differenza profonda fra i due gruppi di fatti se non altro in rapporto al criterio pregiudiziale della « casualità ». Caratteristicamente casuale l'evento del primo gruppo; caratteristicamente volontario ed intenzionale il fatto bellico. Identiche, però, le conseguenze dannose dal punto di vista assicurativo, talchè identica la direttiva dell'impresa assicuratrice di fronte al loro verificarsi.

È naturale la reazione degli Assicurati e, quindi, la richiesta di copertura integrale che sia operante, qualunque risulti la causa del danno. Di fronte a questa richiesta, appaiono logici e doverosi studi e tentativi pratici per trovare limiti e forme di *eventuali soluzioni parziali* — ammettendosi un minimo di possibilità — atte a conciliare i reciproci interessi.

Per quanto riguarda i rischi connessi ai cataclismi naturali, poco cammino è stato compiuto così nell'ambito teorico, come nella realizzazione industriale.

Esistono taluni elaborati statistici sulla distribuzione dei « terremoti » nel tempo e nello spazio e sporadiche assicurazioni sono state e sono assunte dalle Compagnie di varî Paesi come accessorio alle fondamentali coperture riguardanti i rischi di incendio.

In taluni casi, le Compagnie hanno concesso la estensione della garanzia anche ai danni derivanti da inondazioni, da alluvioni, da guasti prodotti dalle acque o da altri simili fenomeni meteorologici; sempre, però, in limiti modesti di somme e sotto forma di copertura complementare a quelle normalmente riconosciute.

In ambiente internazionale — piuttosto sotto l'impulso di quei sentimenti umanitari che hanno dato vita alla grande istituzione della Croce Rossa — sono stati ventilati progetti per stabilire una solidarietà anche finanziaria dei varî Paesi allo scopo di fronteggiare i danni conseguenti al verificarsi delle calamità naturali. In tale occasione sono stati formulati voti, sia per la esecuzione di studi e di ricerche statistico-attuariali per la eventuale applicazione dei principî assicurativi ai rischi di natura catastrofica, sia per la effettiva collaborazione delle Imprese di assicurazione al risarcimento dei relativi danni.

Non è escluso che — realizzandosi, nel clima della nuova collaborazione Europea, una più stretta intesa fra i mercati — sia possibile considerare anche i rischi di natura catastrofica nell'ambito di quelli assicurabili, sia pure entro determinati limiti e con speciali cautele. La Unione per la copertura dei grandi rischi, testè costituita su iniziativa delle maggiori Compagnie di assicurazione tedesche ed italiane allo scopo di integrare le normali possibilità di copertura dei Paesi dell'Europa Continentale, potrà forse rendere concrete dette aspirazioni *realizzando, nel campo della riassicurazione, una mutualità tecnica* che trascenda la omogeneità limitata e definita dal classico « ramo di assicurazione » e consideri, invece, il complesso dei « rischi », alla sola stregua dei due parametri che li « pesano » — PREMIO e VALORE — indipendentemente dalla natura e dalla specie dell'evento.

E ritengo *non impossibile l'intervento del meccanismo assicurativo per garantire le alee eccezionali, talvolta gravissime, dei fenomeni naturali* quando siano realizzate le seguenti condizioni:

1°) *Costituire un insieme di rischi anche eterogenei ma sufficientemente numerosi ed adeguatamente tariffati* (calcolando, direi, *per eccesso* il coefficiente di probabilità, e, cioè, il premio) in maniera da precostituire *subito* debite « riserve di sicurezza »;

2°) ripartire la massa dei rischi fra molti Enti riassicurativi in modo che l'impegno di ciascuno possa riuscire sopportabile anche di fronte ad un andamento particolarmente grave;

3°) attuare un sistema finanziario per cui — nel caso non risultassero sufficienti le « riserve accumulate » — *l'onere della catastrofe possa trovare un ammortamento ciclico abbastanza esteso*;

4°) stabilire dei limiti massimi di risarcimento per evento catastrofico in modo che gli assicuratori conoscano le punte massime della loro esposizione.

È da augurarsi che la capacità tecnica e la buona volontà — mai smentita — degli assicuratori riesca effettivamente in questo dominio, senza dubbio, delicatissimo.

Nei confronti della copertura dei rischi di guerra la situazione assicurativa si presenta in modo diverso, almeno per quanto concerne il settore marittimo.

Nell'attuale conflitto titanico che ha investito il mondo, l'argomento è di particolare interesse.

Le guerre precedenti a quella del 1914-18 per la loro limitazione, come tempo e come spazio, e per le loro ripercussioni dannose al di fuori del combattimento, non avevano fatto sorgere particolari problemi assicurativi nei riguardi delle cose mobili ed immobili.

La guerra del 1914-18 ha, invece, posto nettamente tale *questione assicurativa* sia per i rischi terrestri che per i rischi marittimi.

Le distruzioni, anche ampie, di città, paesi, edifici per effetto specialmente del tiro di artiglieria (in misura molto inferiore, come azione dell'aeronautica) hanno messo in evidenza la enorme esposizione di fronte alla quale si sarebbe trovato l'assicuratore che avesse creduto di includere nelle sue garanzie anche quelle connesse al fatto bellico. La quantità notevolissima di navi e di merci affondate per opera dell'arma sottomarina, se non ha allontanato — come vedremo — l'intervento assicurativo ha reso necessarie l'adeguazione dei tassi di premio e la *partecipazione Statale ad integramento delle possibilità dei mercati privati.*

Il formidabile sviluppo dell'arma aerea e, quindi, le possibilità distruttive del suo bombardamento — così su terra come in mare — hanno esasperato gli elementi del problema ed indotto gli assicuratori, in quest'ultimo decennio, ad esaminare seriamente se e come affrontare alee tanto considerevoli per *fatti così intenzionali e così pesanti negli effetti dannosi.* Le guerre combattute in detto periodo, pur circoscritte nel loro potenziale, hanno confermato le previsioni sulla grandiosità dell'*annientamento di ricchezza nella guerra moderna*, specie se questa avesse assunto — come in realtà si è verificato — la estensione e la portata di conflitto generale fra i popoli.

Per le caratteristiche del rischio, è necessario esaminare separatamente le « *assicurazioni terrestri* » e le « *assicurazioni marittime* ».

Per quanto riguarda i rischi concernenti le « cose » radicate sulla superficie terrestre (con speciale riferimento agli edifici ed impianti, considerati nel contenente e nel contenuto) le associazioni degli assicuratori di tutti i Paesi giunsero unanimi — già da qualche anno prima l'inizio delle nostre guerre di Etiopia e di Spagna — ad *una conclusione decisamente contraria.*

Si può ben dire che il fenomeno bellico, come andamento probabile dei danni che può arrecare ai « beni » esistenti sulla superficie, presenta tutte le quelle *caratteristiche negative* per cui, in linea generale, il rischio catastrofico è considerato estraneo al novero di quelli « assicurabili ». Il fattore intenzionalità interviene decisamente, non solo per compiere il « danno » ma per *localizzare* l'effetto distruttivo laddove esso può maggiormente incidere e per *estendere l'effetto stesso nei più ampi limiti possibili.*

Cade, così, il presupposto del « fortuito » e cadono, egualmente, le condizioni che definiscono il fatto assicurativo come applicazione di una legge probabilistica- approssimata finchè si vuole, ma pure esistente — che ha un suo ciclo di compensazione e un determinato equilibrio, connesso alla equiprobabilità degli eventi.

Le Compagnie di assicurazione di tutto il mondo decisero, quindi, prima della guerra, di *eliminare dalle loro polizze* — in modo preciso e definitivo — *il riconoscimento di sinistri dipendenti dai fatti bellici.* E questo atteggiamento è stato mantenuto durante il conflitto attuale.

Naturalmente, è apparso subito in primo piano il problema dell'indennizzazione dei danni subiti, sempre per fatto di guerra, dai proprietari delle cose mobili ed immobili. Gli Stati sono intervenuti mediante provvide leggi sul « risarcimento dei danni di guerra »; ma non sono mancate iniziative e proposte per cercare possibili soluzioni attraverso la mutualità degli esposti al rischio.

La costituzione di « Associazioni mutue fra i propriatari di immobili » è sembrata a taluni, in Italia ed all'Estero, mezzo adeguato per garantire agli aderenti il rimborso degli eventuali danni arrecati dai fatti di guerra alle cose di loro proprietà; e sono stati elaborati progetti di statuti, di regolamenti, di polizze cercando di adattare alla meglio la struttura assicurativa ad una materia che mal si presta a tale avvicinamento, sia come realtà del suo verificarsi (quale fenomeno del tutto instabile ed imprevedibile) sia come formalismo applicativo.

Se ammettiamo — come appare abbastanza ben dimostrabile e dimostrato — che gli eventi bellici, nelle loro conseguenze dannose a carico delle cose mobili ed immobili esistenti alla superficie, sfuggono alle leggi di una architettura assicurativa, non può esservi dubbio che l'adottare una forma giuridica (associazione mutua) piuttosto che un'altra (azienda assicuratrice) possa radicalmente modificare la possibilità di una soluzione del problema, a meno che, parlando di mutualità fra gli interessati, non ci si riferisca alla struttura primitiva di essa e, cioè, alla mutua di pura ripartizione.

Ma anche nella ipotesi di formare un gruppo di interessati, per ripartire mutualmente i danni subiti in modo che ogni associato corrisponda la quota necessaria per soddisfare ai risarcimenti, oppure che ogni danneggiato accetti, come indennizzo, la percentuale che deriva dalla suddivisione del fondo messo in comune, non sembra possa realizzarsi un organismo *realmente vitale* e *realmente utile* nelle contingenze, anche gravi, del fatto bellico.

Sono, sopratutto, elementi negativi:

— la naturale antiselezione (operante, così in ambito mutualistico, come di fronte all'Azienda assicuratrice) che discende logicamente dalla prevedibile localizzazione degli avvenimenti distruttivi, almeno dei più gravi e dei più concentrati. Accorreranno alla Mutua (come alla associrazione « a premio fisso ») i proprietari delle zone più esposte all'insidia nemica, mentre resteranno estranei alla invocata solidarietà, coloro che si sentono relativamente sicuri data l'ubicazione dei propri beni. In queste condizioni, la mutualità (sia giuridica, sia puramente tecnica) finisce per raccogliere non già un complesso di rischi sui quali, con eguale probabilità, l'evento dannoso può incidere e può non incidere, ma bensì un complesso di rischi che hanno tutti, più o meno, *altissima probabilità di essere colpiti da sinistro*. Praticamente, viene a mancare il contenuto economico dell'assicurazione ed ogni associato o deve pagare un contributo elevatissimo o deve sottostare a notevole riduzione del risarcimento rispetto al danno subito;

— l'impossibilità, o, quanto meno, la grande difficoltà di poter applicare il meccanismo formale dell'assicurazione — con tutto il complesso di termini, di denuncie, di accertamenti, di perizie — nei casi in cui i sinistri riguardano le zone in cui si scontrano gli eserciti o le immediate retrovie.

In queste eventualità, la determinazione del diritto al risarcimento e la valutazione del relativo ammontare sfuggono alle regole del procedimento assicurativo e rientrano nell'organizzazione dei « danni di guerra » che ha specifico fondamento giuridico e specifico sistema applicativo, l'uno e l'altro non sempre compatibili con l'esecuzione di un negozio d'indole privata come quello nascente da un contratto di assicurazione o da una associazione mutualistica;

— la circostanza che la istituzione dell « mutua » sarebbe avvenuta al momento stesso del verificarsi degli eventi di guerra, talchè l'alea di questi ultimi sarebbe stata affrontata *senza il possesso di congrue riserve accumulate in un periodo prebellico.*

Come già detto, il rischio catastrofico può trovare, forse, una qualche realizzazione assicurativa soltanto con la diluizione nel tempo dell'onere eccezionale che si verifica al momento della crisi: e questa diluizione può ottenersi o attraverso accumulo di riserve formate nel periodo della normalità, o con ammortamento a carattere finanziario proiettato nel futuro. Praticamente difficile, senza interventi statali, quest'ultima forma di garanzia — specie nel clima finanziario di guerra — *la possibilità di vita di una una mutua sarebbe legata soltanto alla precostituzione di adeguate riserve.*

Questa considerazioni, diciamo pure di ordine teorico, hanno avuto precisa conferma nel fatto che, nonostante progetti anche concreti e dettagliati, nessun organismo del genere è sorto nei Paesi belligeranti od anche nei Paesi neutri.

Ritengo, però, che la conclusione negativa cui si è giunti di fronte alla realtà di una guerra in atto, non induce a rifiutare definitivamente la possibilità di apprestare i mezzi per il risarcimento dei danni bellici mediante la cooperazione dei proprietari delle cose mobili ed immobili esposti ai danni stessi.

A mio parere, *la mutualità può divenire strumento adeguato* per soddisfare, nell'eventualità di una guerra, il bisogno dei proprietari di venire reintegrati dei danni subìti dai loro beni, *a condizione che riesca possibile realizzare i seguenti capisaldi*:

a) che trattisi di un'*associazione totalitaria*, la quale raccolga tutti i proprietari delle « cose » che si vogliono garantire, senza distinzione di zone, di località, di maggiore o minore esposizione al rischio. Deve essere operativa una mutualità integrale e, cioè, *obbligatoria* in modo che possa realmente agire la fondamentale legge della compensazione;

b) che l'organismo sia *formato sin dal tempo di pace* — in previsione di futuro conflitto — in modo da poter richiedere agli associati contributi relativamente bassi e formare, al tempo stesso, riserve adeguate per la eventualità bellica;

c) che il sistema amministrativo, sia per la raccolta dei contributi che per la regolazione dei rapporti reciproci fra Ente ed associati, riesca il più semplice possibile in modo da evitare la creazione di un Ente mastodontico, creazione alla quale potrebbero indurre la grandiosità finanziaria delle prestazioni e la consistenza numerica dei contribuenti e dei relativi legami contrattuali. Penso che la *organizzazione periferica delle Compagnie di assicurazione potrebbe essere strumento molto idoneo per raggiungere lo scopo col minimo dei mezzi.*

Su dette basi — completate da norme relative agli investimenti dei fondi, all'accertamento ed alla liquidazione degli eventuali danni — stimo possibile l'intervento dell'assicurazione per risolvere il delicato e complesso problema dell'indennizzazione dei sinistri cagionati alle cose dagli avvenimenti bellici.

In merito alle assicurazioni marittime il rischio di guerra — definito come « complesso di danni materiali che colpiscono le navi o le merci caricate su di esse per effetto di mine, siluri od altri ordigni di guerra, per ostilità, arresto, sequestro, cattura e, in genere, per atti od operazioni di guerra da parte di Stati o di Governi amici o nemici » — è considerato assicurativamente con prognosi assai meno riservata di quella che conclude l'esame dello stesso rischio nei confronti delle sicurtà terrestri.

Ed invero, nella materia dei trasporti marittimi, la « nave » (espressione generica di « mezzo galleggiante ») rappresenta, con il suo carico, *entità autonomamente esposta a quei rischi*, durante i suoi viaggi attraverso la vastità dei mari. Si realizza abbastanza bene, in mare, il postulato della *indipendenza dei rischi* ed anche nei casi in cui si verificano parziali aggruppamenti nei porti, l'accumulazione è relativamente limitata; tranne eventualità speciali, di breve durata; comunque, disciplinabile e variabile rapidamente attraverso le disposizioni delle Autorità.

Esiste, dunque, una certa compensazione fra i rischi e con talune cautele ed opportune limitazioni — soprattutto, *con oculata valutazione dell'alea e grande ripartizione* di essa fra molte Compagnie, *è possibile l'intervento della assicurazione.*

Le guerre, ed i varî periodi di esse, non possono venire egualmente considerate agli effetti della valutazione assicurativa della loro « dannosità in mare ». Dobbiamo distinguere i conflitti localizzati da quelli che investono interi Continenti o, come l'odierno, hanno portata mondiale; deve essere diversamente trattato il rischio che colpisce il traffico dei belligeranti da quello che riguarda il commercio marittimo dei neutri; è necessario, infine, valutare separatamente il cosiddetto « rischio d'urto » cioè l'insieme degli eventi dannosi causati dallo scatenarsi delle forze belliche nel loro primo incontro nel fulmineo ed, ormai, improvviso inizio della battaglia.

Per i Paesi neutrali o non belligeranti, il rischio di guerra nei trasporti marittimi riguarda essenzialmente le possibilità di danno *per urto contro mine* (fisse o vaganti), *per eventuali arresti o sequestri* — di navi o di merci — ad opera delle forze belligeranti in base alle regole del diritto internazionale. Parimenti limitata è l'alea della flotta mercantile dei Paesi in guerra quando questa abbia particolari caratteristiche o sia circoscritta in determinate zone.

In dette circostanze, la copertura del rischio di guerra è richiesta dagli assicurati non solo perchè esiste realmente un pericolo ma perchè, per il possibile sopravvenire di fatti anche impensati, la situazione può improvvisamente aggravarsi ed anche radicalmente mutarsi ed *è normalmente concessa dalle Compagnie assicuratrici senza eccessive limitazioni* ed in base a tariffe — variabili nel tempo e nello spazio — che tengono conto (come meglio possibile) delle alee che si corrono.

È, qui, da ricordare come il rischio di « mine e torpedini » — specie dopo una guerra — sia generalmente incluso, con soprapremio, nelle polizze marittime, talchè può ben dirsi che esiste — ed è fondatamente apprezzato come entità ed estensione — un « *rischio di guerra del tempo di pace o di quasi pace* ».

Se, però, si tratta del *traffico marittimo di Paesi belligeranti*, coinvolti in un conflitto generale che impegna ogni forza ed ogni possibilità di offesa, l'ausilio assicurativo da parte delle Compagnie private resta *praticamente limitato* di fronte alla gravità del rischio, di fronte alla imponenza delle garanzie che sono in giuoco.

Il meccanismo assicurativo, con tutta la sua struttura centrale e periferica, è pur sempre posto a servigio del Paese per acquisire i rischi, accertare i danni di guerra subiti dal naviglio mercantile ed indennizzarli, ma, generalmente, *sono gli Stati che intervengono assumento a carico della collettività buona parte, se non tutto, l'onere finanziario.*

Questo intervento non modifica l'aspetto tecnico del problema — di cui mi occupo — se non nella eventualità che, per determinati settori, si ritenga di evitare l'applicazione di « premi » adeguati ai rischi e, per non aggravare i prezzi, vengano stabilite tariffe ridotte, generalmente definite « tariffe politiche ».

Ed, appunto, nell'ambito puramente attuariale è lecito domandarsi se esista la possibilità di concretare premi tecnici laddove il tecnicismo dei premi per l'assicurazione contro i danni alle cose consiste nella determinazione di una « frequenza » statisticamente elaborata e congruamente interpretata.

Se, con molta circospezione, con opportuni arrotondamenti, con elastiche adeguazioni successive, è, forse, possibile avvalersi dell'esperienza per stabilire i premi dei rischi di guerra che abbiamo più sopra definito « del tempo di pace » (sostanzialmente, rischio di mine), non è altrettanto consentita una « tecnica classica » allorquando si è di fronte ai rischi della guerra marittima di Grandi Potenze strette l'una all'altra in conflitto mortale.

Le statistiche di una guerra passata nulla valgono in un conflitto nuovo che presenta sempre nuovi aspetti, nuove armi, nuove imprevisti bellici; in una stessa guerra, periodi successivi sono caratterizzati da eventi diversi, talchè il paragone di ciò che è avvenuto nel passato può essere soltanto punto di partenza per una valutazione soggettiva dei rischi futuri; al momento iniziale del conflitto o all'inizio di fasi successive, il diagramma del fenomeno bellico può presentare punte anche eccezionali per influenza della sorpresa o di altri fattori militari.

Queste difficoltà non significano, però, annullamento totale della « esperienza statistica » nè rinuncia completa al teoretismo assicurativo per cui la « frequenza » di ciò che avvenuto è base per determinare la « probabilità » di ciò che potrà avvenire. Anche in tema di rischi di guerra marittimi le cifre hanno alto significato e costituiscono pur sempre la base dell'apprezzamento quantitativo del rischio, se non altro come *orientamento sull'ordine di grandezza intorno al quale deve essere costruito l'indice probabilistico e, cioè, il premio.*

È noto che anche nella costruzione dei « premi » nelle assicurazioni normali riguardanti le cose, l'espressione numerica della frequenza viene corretta dall'intervento di fattori, anche soggettivi, che si riferiscono al rischio in sé stesso, all'ambiente, alle condizioni probabili o prevedibili in cui il fenomeno considerato avrà il suo svolgimento. Questa regola normativa tanto maggiormente vale nell'apprezzamento di un rischio, come quello di guerra, su cui incidono tanti elementi di contingenza, di incertezza, *di eccezionalità*. Dubitando assai che, in senso proprio, possa parlarsi di una « tecnica tariffale » nelle assicurazioni dei rischi di guerra marittimi, ritengo che *esiste un solo tecnicismo in tale materia*: quello di apprezzare inizialmente le alee con « eccesso di margine » in maniera da *poter subito costituire qualche riserva* con la quale l'assicuratore sia in grado di affrontare le punte eccezionali del diagramma.

Il problema degli « scarti » (come « frequenza » e come « valore ») ha, qui, importanza veramente decisiva per cui resta confermata la necessità (già indicata trattando della possibile copertura dei rischi catastrofici naturali) di partire con margine attivo, compensare con le riserve le eccezionali asprezze degli eventi, adeguare via via, col tempo, la linea dei premi a quella dei danni.

E non sembri il sistema « eccesso di prudenza » trattandosi, invece, di doverosa tutela della compagine stessa dell'Azienda assicuratrice nei riguardi di avvenimenti che solo coraggiosa condotta e alto senso di responsabilità fanno rientrare nel campo fondamentale della « casualità assicurabile ».

INTORNO ALLA VALUTAZIONE PER GRUPPI DELLA RISERVA MATEMATICA DI UN PORTAFOGLIO DI ASSICURAZIONI MISTE

GUIDO SANTACROCE

1. — È noto che la rilevazione e l'elaborazione dei dati occorrenti per il calcolo a fine esercizio della riserva matematica di un portafoglio di assicurazioni sulla vita si possono ordinare, con notevole economia di lavoro e piena sicurezza dei risultati, avvalendosi di speciali impianti di statistica meccanizzata, che richiedono l'impiego di schede perforate in cui, secondo apposito codice, vengono registrate le opportune caratteristiche dei contratti.

Nonostante l'efficacissimo ausilio di codesti mezzi meccanici, il complesso delle operazioni inerenti alle valutazioni di bilancio costituisce pur sempre una delicata fatica, tanto più onerosa, quanto più considerevole è la mole del portafoglio. Segnatamente nel caso delle ordinarie polizze miste, che oggi rappresentano la categoria prevalente nel ramo vita, non è però affatto scemata, per la valutazione delle riserve in sede di inventario, l'utilità di applicare metodi sufficientemente accurati che, riducendo al minimo gli smistamenti dei contratti, consentano per ciascun gruppo un rapido, agevole calcolo in blocco della corrispondente riserva, riferita ad un'opportuna età media. Si pone in evidenza nel presente scritto come la determinazione di questa età media possa ricollegarsi a una speciale ipotesi circa l'andamento delle annualità vitalizie temporanee da cui dipendono le singole riserve, ipotesi che, ulteriormente particolarizzata, conduce a metodi noti di valutazione.

2. — Consideriamo un portafoglio di assicurazioni miste semplici a premio annuale e, per la valutazione della relativa riserva matematica a fine esercizio (31 dicembre), riferiamoci alle seguenti

usuali convenzioni in ordine alla determinazione delle età raggiunte e alla distribuzione durante l'anno degli anniversari delle date di effetto pertinenti ai contratti in vigore.

L'età raggiunta dagli assicurati alla data dell'inventario si computa in numeri interi, assumendo come nati al 31 dicembre di un dato anno gli assicurati nati tra il 1° luglio di quell'anno e il 30 giugno successivo. Così, per ciascun assicurato, l'età x alla data dell'inventario è data dalla differenza

$$x = \beta - \nu ,$$

dove β è l'anno solare dell'inventario (*anno di bilancio*) e ν l'anno corrispondente alla data convenzionale di nascita (*anno convenzionale di nascita*).

Quanto agli anniversari delle date di effetto delle polizze, se ne ammette l'uniforme distribuzione nel corso dell'esercizio, sì da poter riportare a metà esercizio la scadenza media dei premi annui.

Ciò posto, se le polizze del portafoglio considerato si classificano secondo l'anno solare di scadenza, per ciascun gruppo di contratti che risulta da siffatta selezione il numero dei premi annui ancora dovuti sarà fornito dalla differenza

$$r = \sigma - (\beta + 1) ,$$

dove σ rappresenta l'anno solare di scadenza.

La riserva matematica del gruppo si esprime, pertanto, con la formula

$$W_r = \Sigma S_i A_{x_i \overline{r+½}|} - \Sigma P_i \, {}_{½/}\mathfrak{a}_{x_i \overline{r}|} \tag{1}$$

in cui P_i e S_i designano rispettivamente il premio annuo e la somma assicurata complessivamente sulle teste coetanee (x_i).

L'annualità vitalizia ${}_{½/}\mathfrak{a}_{x\overline{r}|}$ si determina con la relazione approssimata

$${}_{½/}\mathfrak{a}_{x\overline{r}|} = \frac{1}{2} \left(\mathfrak{a}_{x\overline{r}|} + a_{x\overline{r}|} \right) ,$$

ossia

$${}_{½/}\mathfrak{a}_{x\overline{r}|} = a_{x\overline{r}|} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{D_{x+r}}{D_x} \right)$$

che, rammentando la nota formula approssimata per il vitalizio continuo

$$\bar{a}_x = a_x + \frac{1}{2} ,$$

diventa

$$_{½/}\mathrm{a}_{\overline{xr}|} = \bar{a}_x - \frac{D_{x+r}}{D_x} \bar{a}_{x+r} ,$$

ovvero

$$_{½/}\mathrm{a}_{\overline{xr}|} = a(x, r) ,$$

dove $a\,(x, r)$ indica il vitalizio continuo di durata r sulla testa (x). Nei riguardi del tasso di mista $A_{\overline{xr+½}|}$, parimenti si ha

$$A_{\overline{xr+½}|} = \frac{1}{2}\,(A_{\overline{xr}|} + A_{\overline{xr+1}|}) = 1 - d\left[\frac{1}{2} + a(x, r)\right] ,$$

ove $d = 1 - v$.

Ne segue per W_r la formula

$$W_r = \left(1 - \frac{d}{2}\right) \Sigma S_i - \Sigma(P_i + S_i d) a(x_i, r) . \tag{2}$$

3. — La somma di tutte le riserve parziali W_r corrispondenti ai vari valori di r costituisce la riserva globale del portafoglio considerato e la valutazione di essa potrà rendersi più semplice e spedita, ove le espressioni

$$\Sigma\,(P_i + S_i d)\; a\,(x_i, r) ,$$

che di detta riserva formano parte integrante, possano essere ricondotte, *per qualunque valore di* r, alla forma

$$a\,(u, r)\, \Sigma\,(P_i + S_i\, d)$$

con u funzione soltanto delle età x_i e dei numeri $\lambda_i = P_i + S_i\, d$. S'intende, in tale guisa, sostituire alle varie età x_i un'età media u, il cui valore unicamente dipenda dalle età x_i e dai parametri λ_i.

Come dovrebbe esprimersi l'annualità vitalizia $a(x, r)$ perchè ciò sia possibile?

Posta la relazione

$$\Sigma\, \lambda_i a(x_i, r) = a(u, r) \Sigma\, \lambda_i , \tag{3}$$

valida per qualunque r, mediante derivazione rispetto a x_i si ottiene

$$\lambda_i \frac{\partial a(x_i, r)}{\partial x_i} = \frac{\partial a(u, r)}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x_i} \Sigma\, \lambda_i$$

e quindi, avendosi $\frac{\partial a}{\partial x} \neq o$, si desume

$$\frac{\lambda_i}{\Sigma\lambda_i} \frac{\frac{\partial a(x_i, r)}{\partial x_i}}{\frac{\partial a(u, r)}{\partial u}} = \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

Poichè u è indipendente da r, tale risulta altresì $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ e però, derivando rispetto a r, si ha

$$\frac{\partial^2 a(x_i, r)}{\partial x_i \partial r} \frac{\partial a(u, r)}{\partial u} - \frac{\partial^2 a(u, r)}{\partial u\, \partial r} \frac{\partial a(x_i, r)}{\partial x_i} = 0\,,$$

ossia

$$\frac{\frac{\partial^2 a\,(x_i, r)}{\partial x_i\, \partial r}}{\frac{\partial a\,(x_i, r)}{\partial x_i}} = \frac{\frac{\partial^2 a\,(u, r)}{\partial u\, \partial r}}{\frac{\partial a\,(u, r)}{\partial u}}\,,$$

ond'è

$$\frac{\frac{\partial^2 a\,(x, r)}{\partial x\, \partial r}}{\frac{\partial a\,(x, r)}{\partial x}} = -\frac{N'(r)}{N\,(r)}\,,$$

essendo $N\,(r)$ caratteristica di una funzione della sola r.

Perchè, dunque, sussista la (3), qualunque sia r, deve risultare funzione soltanto di r la derivata logaritmica rispetto a r della derivata del vitalizio $a\,(x, r)$ rispetto a x:

$$\frac{\partial}{\partial\, r} \log \frac{\partial a\,(x, r)}{\partial x} = -\frac{N'(r)}{N\,(r)}\,,$$

da cui, integrando e denotando con $M\,(r)$ un'altra funzione della sola r e con $f\,(x)$ una funzione della sola x, si conclude che il vitalizio $a\,(x, r)$ deve ridursi all'espressione

$$a\,(x, r) = M(r) - N(r)\,f(x)\,. \tag{4}$$

Si osservi che, ove il vitalizio possa esprimersi nella forma (4), la corrispondente legge di sopravvivenza si ricava immediatamente, derivando rispetto a r la formula

$$a\,(x, r) = \int_0^r p\,(x, t)\, e^{-\delta t}\, dt\,,$$

dove $p\,(x, r)$ rappresenta la probabilità di vita dopo r anni di una testa (x).

Pertanto, si ha

$$p\,(x, r) = e^{\delta r}\, \frac{\partial a\,(x, r)}{\partial r}$$

e quindi, per la (4),

$$p\,(x, r) = e^{\delta r}\,[M'(r) - N'(r)\, f(x)]\,. \tag{5}$$

Inversamente, ove $p\,(x, r)$ sia espressa dalla (5), l'annualità vitalizia $a\,(x, r)$ è data da una formula come la (4).

4. — Ammesso, in linea di approssimazione, che $a\,(x. r)$ possa rappresentarsi con la formula (4), l'età media u, in virtù delle (3) e (4), viene definita da

$$f(u) = \frac{\Sigma \lambda_i f(x_i)}{\Sigma \lambda_i} \tag{6}$$

cioè u è una media delle x_i secondo la scala $f\,(x)$ ponderata in base alle quantità λ_i. Come si vede, essa dipende soltanto dalla configurazione delle età x_i e dei parametri λ_i.

La più ovvia applicazione della (6) segue dal supporre $f\,(x)$ lineare. In tal caso, si può porre semplicemente

$$f\,(x) = x$$

e la u diventa

$$u = \frac{\Sigma \lambda_i\, x_i}{\Sigma\, \lambda_i} \tag{7}$$

media aritmetica ponderata delle età x_i con pesi pari a λ_i.

Risulta dalla (7) che, se u è l'età media relativa alle età x_i sarà $u + h$ l'analoga età media corrispondente alle età $x_i + h$.

Classificando le polizze in vigore alla data del bilancio secondo l'anno di scadenza, il conteggio dell'età media u di ciascun raggruppamento derivante da questa classificazione si effettua con rapidità, senza che sia necessario operare ad ogni valutazione il computo dei prodotti $\lambda_i x_i$. Basta, all'uopo, disporre che, al perfezionamento di ciascuna polizza, vengano trascritti nella corrispondente scheda attuariale i seguenti valori ausiliari, invarianti per l'intera durata del contratto,

$$\lambda_i = P_i + S_i d \; ; \qquad \lambda_i y_i = (P_i + S_i d)\, y_i \, ,$$

essendo P_i il premio annuo, S_i la somma assicurata e y_i *l'età a scadenza* (1) dell'assicurato, definita come differenza tra l'anno di scadenza e quello convenzionale di nascita.

Ora, riferendosi ad uno dei gruppi indicati, per cui siano σ l'anno di scadenza e y_i le singole età a scadenza, si ha che *l'età media a scadenza*

$$z = \frac{\Sigma \lambda_i y_i}{\Sigma \lambda_i}$$

si ricava sommando i numeri ausiliari $\lambda_i y_i$ registrati nelle schede e dividendo il totale ottenuto per la somma dei corrispondenti numeri λ_i, essi pure già annotati sulle schede stesse. Segue poi l'età media u alla data di valutazione dalla differenza

$$u = z - (\sigma - \beta) \, . \tag{8}$$

Così determinata u, la riserva complessiva del gruppo vale

$$\left(1 - \frac{d}{2}\right) \Sigma S_i - a(u, r)\, \Sigma \lambda_i \, ,$$

la sommatoria essendo estesa a tutte le polizze componenti il gruppo.

5. — Il procedimento dianzi descritto può usarsi in pratica per valutazioni di massima della riserva di gruppo, quando cioè non si esiga una stretta approssimazione, dato che l'ipotesi, su cui il metodo si basa, male si concilia con l'effettivo andamento di $a\,(x, r)$. Per ogni assegnato valore di r, nell'ipotesi fatta le differenze

$$-\Delta a(x, r) = a(x, r) - a(x + 1, r)$$

risultano costanti rispetto a x; mentre, in relazione alle durate e alle classi di età normalmente ricorrenti in siffatte valutazioni,

(1) Si usa la locuzione elittica *età a scadenza* in luogo di età al termine dell'anno di scadenza.

dalle usuali tavole di esperienza sulla mortalità degli assicurati si rileva che il vitalizio tende a decrescere con ritmo vieppiù accentuato al crescere dell'età x. Questa circostanza induce a ritenere che migliore adattamento sia possibile raggiungere, ammettendo $f(x)$ rappresentabile mediante una funzione esponenziale

$$f(x) = b^x .$$

L'età media a scadenza risulta ora definita dall'equazione

$$(9) \qquad b^z = \frac{\Sigma \lambda_i \, b^{v_i}}{\Sigma \lambda_i}$$

e anche in tal caso l'età media u alla data di valutazione si ricava dall'età media a scadenza z mediante la relazione (8).

Quali valori ausiliari da inserire sulle schede attuariali delle singole polizze qui si assumono

$$\lambda_i = P_i + S_i d \; ; \qquad \lambda_i b^{v_i} ,$$

nel presupposto che il parametro b sia stato determinato per interpolazione, in base alla tavola adottata dei valori delle annualità vitalizie [1].

In modo del tutto analogo a quello esposto nel precedente §, l'introduzione dei predetti valori ausiliari agevola notevolmente il sistematico apprestamento dei dati necessari per le valutazioni di modo che, mediante la semplice selezione dei contratti secondo l'anno di scadenza, risulta quasi immediato il calcolo dell'età media e quindi della riserva di ciascun gruppo.

6. — Il processo di valutazione della riserva matematica che, come si è visto, deriva dall'ipotesi che l'annualità vitalizia possa essere rappresentata con la formula

$$(10) \qquad a(x, r) = M(r) - N(r)\, b^x$$

---

(1) Se la tavola di mortalità è perequata con la formula

$$l_x = k s^x g^{c^x}$$

si dirà in seguito come la costante c di Makeham fornisca un conveniente valore del parametro b.

è dovuto al LIDSTONE, che lo introdusse nella tecnica attuariale, supponendo la tavola di mortalità perequata secondo la legge di MAKEHAM (1).

Se, infatti, la legge di sopravvivenza è

$$l_x = k\, s^x g^{c^x} ,$$

si desume

$$p\,(x, r) = \frac{l_{x+r}}{l_x} = s^r\, e^{c^x(c^r-1)\gamma} ,$$

ove

$$\gamma = \log g$$

Ne segue

$$p\,(x, r) = s^r \left\{1 + c^x\,(c^r - 1)\,\gamma + \frac{1}{2}\, c^{2x}\,(c^r - 1)^2\,\gamma^2 + \ldots. \right\}$$

da cui, ammettendo lecito di trascurare i termini della serie successivi al secondo, si ha approssimativamente

$$p\,(x, r) = s^r \left\{1 + c^x\,(c^r - 1)\,\gamma\right\}$$

che è appunto della forma (4) con $f\,(x) = c^x$; onde $a\,(x, r)$ si esprime con una formula del tipo (10), in cui il valore del parametro b è la costante c di MAKEHAM, e precisamente si ha

$$a\,(x, r) = a_0 + c^x\,\gamma\,(a_1 - a_0) ,$$

dove con a_0 e a_1 si denotano i valori attuali delle rendite certe (continue) di durata r, rispettivamente calcolati alle forze d'interesse δ_0 e δ_1 tali che

$$e^{\delta-\delta_0} = s \quad , \quad e^{\delta-\delta_1} = cs .$$

7. — Allo scopo di tener separato nella determinazione della riserva il calcolo dell'impegno dell'assicuratore da quello degli assicurati, il metodo, come proposto dal LIDSTONE, implica la considerazione di due distinte età medie, l'una definita da

$$c^u = \frac{\Sigma\, S_i\, c^{x_i}}{\Sigma\, S_i}$$

(1) G. I. LIDSTONE, *Some Remarks on the Valuation of Endowment Assurances in Groups.* « J. I. A. », vol. XXXIV, 1899, pagg. 61-84; *Further Remarks on the Valuation of Endowment Assurances in Groups.* « J. I. A. », vol. XXXVIII, 1903, pagg. 1-34.

per il valore attuale dei capitali assicurati e l'altra da

$$c^{u'} = \frac{\Sigma P_i c^{x_i}}{\Sigma P_i}$$

per il valore attuale dei premi ancora dovuti.

Peraltro, dalle ricerche del LIDSTONE si può trarre la conclusione che per le ordinarie esigenze è sufficiente fare ricorso ad una medesima età media, adottando tanto per i capitali, quanto per i premi, l'età media calcolata in base alle somme assicurate. Si consegue con questo mezzo il notevole vantaggio d'introdurre per ciascun contratto un solo valore ausiliario

$$S_i c^{y_i}$$

che, per diminuire la grandezza dei numeri su cui devesi operare, conviene moltiplicare per il fattore c^{-55}, scegliendo così quale valore ausiliario

$$Z_i = S_i c^{y_i - 55}.$$

Osservando che il secondo membro della relazione che definisce l'età media a scadenza z

$$c^{z-55} = \frac{\Sigma Z_i}{\Sigma S_i}$$

rappresenta una media dei valori Z_i per unità di capitale assicurato, il valore di z si può dedurre « illico et immediate » sulla scorta di una predisposta tavola di valori della funzione Z in corrispondenza alle varie età.

Ai fini delle applicazioni, l'efficacia e il successo del metodo sono strettamenti connessi con la legittimità dell'ipotesi concernente l'andamento delle annualità vitalizie. Esperienze eseguite in proposito dal LIDSTONE e successivamente da altri attuari hanno posto in luce l'ottima approssimazione che si consegue valutando le riserve col metodo indicato. Ad es., il LIDSTONE, nel farne applicazione per il calcolo della riserva di un portafoglio di assicurazioni miste (tavola HM 3%) per un complessivo ammontare di somme assicurate di £ 1.984.030 ed un importo di premi puri di £ 70.869, scegliendo appunto per il parametro b la costante di MAKEHAM $c = 1.09561$ pertinente alla detta tavola di mortalità, ha ottenuto per la riserva il valore 357.017 con un errore assoluto di appena £ 762, pari al 2,13 ‰ della riserva medesima [1].

Se si rammenta che la media u definita dalla formula

$$b^u = \frac{\Sigma S_i b^{x_i}}{\Sigma S_i} \tag{11}$$

è funzione crescente della base [2] b, siffatto scarto potrebbe ulteriormente ridursi, assegnando al parametro b, in luogo della costante di MAKEHAM, un valore di poco inferiore. Tenuto tuttavia presente che, scegliendo come valore di b la costante di MAKEHAM, il metodo di LIDSTONE d'ordinario conduce ad un errore in eccesso praticamente irrilevante per l'ammontare complessivo delle riserve considerate, conviene in pratica riferirsi a detta determinazione di b nella costruzione dei valori ausiliari, anche perchè in tale modo codesti valori possono facilmente essere utilizzati per la stima dei sinistri teorici.

8. — In relazione a un gruppo di polizze con scadenza nell'anno σ e nell'ipotesi che valga la legge di mortalità di MAKEHAM

$$\mu_x = A + Bc^x ,$$

---

(1) G. L. LIDSTONE, *Further Remarks on the Valuation of Endowment Assurances in Groups*. « J. I. A. », vol. XXXIV, 1899, pp. 510-14.

(2) Di detta proprietà nel modo più spiccio ci si può rendere conto come segue.

Posto

$$b = e^r , \quad x_i = \log \alpha_i , \quad u = \log \xi$$

la relazione

$$b^u = \frac{\Sigma S_i b^{x_i}}{\Sigma S_i}$$

si scrive

$$\xi^r = \frac{\Sigma S_i \alpha_i^r}{\Sigma S_i}$$

con che ξ risulta una media di potenze d'ordine r delle α_i, la quale, com'è noto, è funzione crescente di r. Ne segue che pure $u = \log \xi$ è funzione crescente di r o, se si vuole, di $b = e^r$.

Conviene, inoltre, notare che, col tendere di b all'unità, l'età media u secondo la (11) tende a coincidere con la media aritmetica delle età ponderata in base alle somme assicurate S_i. Per la regola di l'HOSPITAL, infatti, si ha

$$\lim_{b \to 1} u = \lim_{b \to 1} \frac{\log \Sigma S_i b^{x_i} - \log \Sigma S_i}{\log b} = \lim_{b \to 1} \frac{\Sigma S_i x_i b^{x_i}}{\Sigma S_i b^{x_i}} = \frac{\Sigma S_i x_i}{\Sigma S_i} .$$

sì che per il parametro b sia lecito assumere il valore della costante c, è interessante accennare, infine, come si determini, secondo LIDSTONE, l'ammontare globale dei sinistri teorici in un dato esercizio β, usufruendo dei valori ausiliari Z_i.

Si considerino, per un momento, le polizze del gruppo, alle quali corrisponda una medesima età a scadenza y_i e si denoti con S_i il relativo importo dei capitali assicurati al principio dell'anno di valutazione e con S'_i l'analogo importo alla fine dell'anno stesso.

Essendo

$$x_i = y_i - (\sigma - \beta + 1)$$

l'età all'inizio dell'anno β corrispondente all'età a scadenza y_i, i sinistri teorici afferenti all'insieme delle polizze suddette ammontano a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(S_i + S'_i)\mu_{x_i+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}(S_i + S'_i)(A + Bc^{x_i+\frac{1}{2}})\\ &= \frac{A}{2}(S_i + S'_i) + \frac{B}{2}(S_i + S'_i)\,c^{x_i+\frac{1}{2}}\\ &= \frac{A}{2}(S_i + S'_i) + \frac{B}{2}c^{54\frac{1}{2}}(Z_i + Z'_i)\,c^{\beta-\sigma}\end{aligned}$$

dove

$$Z_i = S_i\,c^{y_i-55} \quad , \quad Z'_i = S'_i\,c^{y_i-55}$$

Per l'intero gruppo considerato, il totale dei sinistri teorici risulta, quindi, espresso da

$$\frac{A}{2}(\Sigma\,S_i + \Sigma\,S'_i) + \frac{B}{2}c^{54\frac{1}{2}}(\Sigma\,Z_i + \Sigma\,Z'_i)\,c^{\beta-\sigma}\,.$$

In questa espressione si rileva un agevole « modus operandi » per valutare la mortalità teorica dei capitali, in base all'ordinamento e agli elementi di calcolo necessari per la determinazione della riserva matematica secondo il metodo di LIDSTONE.

INFLUENZA DELLE OSCILLAZIONI DEL VALORE DELLA MONETA SUL PREMIO DELLE ASSICURAZIONI A PRIMO FUOCO

RAFFAELE D'ADDARIO

1. — Il premio relativo ad una data assicurazione si dice matematicamente equo quando è calcolato in modo che si abbia equivalenza tra le presunte prestazioni complessive degli assicurati e le presunte prestazioni complessive dell'assicuratore.

Le prestazioni degli assicurati e quelle dell'assicuratore sono solitamente espresse in moneta e quindi l'iniziale equivalenza finanziaria (al momento della stipulazione del contratto) tra le presunte reciproche prestazioni complessive può essere successivamente turbata (durante la vita del contratto), in vario modo ed in varia misura, a causa di eventuali fluttuazioni del valore della moneta in cui tali prestazioni sono espresse.

Le perturbazioni, però, sono diverse a seconda che si tratti di *assicurazioni di somme* o di *assicurazioni di risarcimento*.

Nelle assicurazioni di somme, come per esempio le assicurazioni vita, le prestazioni reciproche dell'assicurato e dell'assicuratore sono preventivamente fissate e quindi al momento della esecuzione del contratto si avrà *equivalenza nominale* tra le prestazioni monetarie reciproche, mentre l'*equivalenza reale*, e cioè in termini di capacità di acquisto, sarà più o meno profondamente turbata in dipendenza delle più o meno forti fluttuazioni del valore della moneta avvenute dall'epoca della stipulazione all'epoca della esecuzione del contratto.

Nelle assicurazioni di risarcimento, invece, la prestazione dovuta dall'assicuratore, in caso di sinistro, al contrario di quanto avviene nelle assicurazioni di somme, nelle quali è contrattualmente prefissata in una determinata somma, dipende dalla somma assicurata e dall'importo dei *danni* o delle *perdite* causate dal sinistro, importo costituito dalla spesa necessaria, *determinata sulla base dei prezzi al tempo ed al luogo del sinistro*, per la reintegrazione del patrimonio dell'assicurato, nei suoi elementi, o nella sua totale astrattà entità, nello stato anteriore al momento del sinistro.

Da tutto ciò segue che l'equivalenza tra le prestazioni reciproche dei contraenti, assicurato ed assicuratore, implica che, durante la vita del contratto, il valore della moneta sia stabile. Nel caso, infatti, di instabilità del valore della moneta, mentre le prestazioni dell'assicurato restano nominalmente costanti, in quanto contrattualmente fissate in una certa somma di denaro (*premio*), quelle dell'assicuratore, al contrario, variano col variare dei prezzi.

Le perturbazioni dell'equilibrio tra le prestazioni reciproche dei contraenti, causate dalle fluttuazioni del valore della moneta, sono, però, diverse a seconda che si tratti di *assicurazioni-danni* o di *assicurazioni-perdite* (1).

Nelle assicurazioni-danni, infatti, le fluttuazioni del valore della moneta, ripercuotendosi non solo sulla valutazione dei danni causati da un certo sinistro, ma ben anche sulla valutazione delle cose assicurate, portano ad un turbamento della corrispondenza iniziale tra premio e valore delle cose assicurate. E propriamente, nel caso di *assicurazione piena* e di aumento del potere di acquisto

---

(1) Le *assicurazioni-danni* sono quelle mediante le quali si assicura un determinato elemento patrimoniale contro i *danni* materiali cui esso può andare soggetto in dipendenza del verificarsi di determinati eventi. Per queste assicurazioni la somma massima assicurabile, limite superiore del risarcimento dei danni causati da un certo sinistro, è *oggettivamente* rappresentata dal valore monetario dell'elemento patrimoniale assicurato.

Le *assicurazioni-perdite* sono quelle mediante le quali si assicura tutto il patrimonio astrattamente considerato contro le *perdite* cui esso può andare soggetto in dipendenza del verificarsi di determinati eventi. Per queste assicurazioni spesso manca una base oggettiva per la valutazione preventiva della somma massima assicurabile e perciò si fissa *soggettivamente* una certa somma (*massimale di garanzia*) sino alla concorrenza della quale l'assicuratore risarcirà, in caso di sinistro, le perdite cui il patrimonio dell'assicurato può andare soggetto.

Alla prima categoria appartengono, per esempio, le assicurazioni incendi, mentre della seconda categoria fanno parte le assicurazioni di responsabilità civile verso terzi, le quali tendono, come è noto, a riparare le perdite patrimoniali dipendenti da legale responsabilità dell'assicurato per danni cagionati a terzi, danni non sempre preventivamente valutabili e perciò si fissa un massimale di garanzia sino alla concorrenza del quale l'assicuratore risarcirà, in caso di sinistro, le perdite cui il patrimonio dell'assicurato andrà soggetto.

della moneta si ha *sopra assicurazione* e l'assicurato, di conseguenza, paga un premio maggiore di quello corrispondente al vero valore delle cose assicurate, ma per converso, verificandosi un sinistro, avrà diritto al pieno risarcimento del danno. Viceversa, nel caso di deprezzamento monetario si ha *sotto assicurazione*, per cui, verificandosi un sinistro, si applica il principio di proporzionalità, che funziona, in qualche modo, come una specie di meccanismo di riequilibrazione, in quanto, annullando guadagni e perdite di congiuntura sul premio, ristabilisce l'equità contrattuale tra le parti contraenti. In questo caso, però, la previsione dell'assicurato rispetto alla entità del suo bisogno eventuale, cui egli fa fronte con l'assicurazione, rimane più o meno profondamente turbata in dipendenza del più o meno forte deprezzamento monetario rispetto all'epoca della stipulazione del contratto.

Nelle assicurazioni-danni *a primo rischio*, invece, le perturbazioni sono di varia natura e di diversa entità. Con queste assicurazioni, infatti, si deroga al principio di proporzionalità, in quanto per un rischio di valore v, pur contraendo un'assicurazione per un valore $m < v$, si stabilisce, come corrispettivo di un opportuno tasso di premio, l'obbligo da parte dell'assicuratore di risarcire i danni eventuali sino alla concorrenza della somma assicurata m. Sicchè, mentre l'assicurato assume una obbligazione in moneta, consistente nel pagare per tutta la durata del contratto un premio annuale nominalmente costante espresso in moneta, l'assicuratore assume, invece, una vera e propria obbligazione in merci, la cui traduzione monetaria varia, di conseguenza, col variare del potere d'acquisto della moneta, in quanto la prestazione dell'assicuratore consiste appunto nel risarcire i danni valutati ai prezzi dell'epoca del sinistro.

Le perturbazioni dell'equilibrio tra le prestazioni reciproche dei contraenti, causate dalle fluttuazioni del valore della moneta, relative alle assicurazioni-perdite formarono oggetto di alcune nostre precedenti memorie, nelle quali considerammo particolarmente le assicurazioni di responsabilità civile verso terzi, che rappresentano il caso più importante, dal punto di vista teorico e pratico, e tecnicamente tipico delle assicurazioni-perdite [1].

---

[1] R. D'Addario, *Guadagni e perdite nelle assicurazioni di responsabilità derivanti dalle fluttuazioni del valore della moneta*, in « Atti dell'Istituto nazionale

In questa rapidissima nota, invece, ci proponiamo di studiare gli utili e le perdite di congiuntura relative alle assicurazioni a primo rischio considerando particolarmente le *assicurazioni a primo fuoco*, che rappresentano il caso più importante, dal punto di vista teorico e pratico, e tecnicamente tipico delle assicurazioni a primo rischio.

2. — Consideriamo pertanto, in un certo intervallo di tempo, per esempio l'anno, una collettività di N rischi *uguali*, *omogenei* ed *indipendenti* assicurati contro i danni causati da incendio.

Indichiamo con v il valore di ogni rischio assicurato; con x, variabile nel campo (o, v), l'importo dei danni causati da ogni sinistro; con $\varphi(x)dx$ il numero dei sinistri il cui importo dei danni da ognuno d'essi causati sia compreso tra x ed $x + dx$; con $n(x)$ il numero dei sinistri il cui importo dei danni da ognuno d'essi causati supera x; con n il numero complessivo dei sinistri; con $s(x)$ l'importo complessivo dei danni causati dai sinistri il cui importo dei danni da ognuno d'essi causati non supera x; con s l'importo complessivo dei danni causati dagli n sinistri; e con a l'importo medio dei danni causati da ogni sinistro.

Per le posizioni fatte avremo dunque:

$$n(x) = \int_x^v \varphi(x)dx \; ; \tag{1}$$

$$n(o) = n \; ; \tag{2}$$

$$s(x) = \int_0^x x\varphi(x)dx \; ; \tag{3}$$

$$s(v) = s \; ; \tag{4}$$

$$a = \frac{s}{n} \, . \tag{5}$$

Indicando con τ il tasso unitario annuale del premio per un'*assicurazione piena* di un rischio di valore v, sarà

$$\tau = \frac{s}{Nv} \, , \tag{6}$$

---

delle assicurazioni », vol. XIII, Roma, 1941; Id., *Intorno ai contratti di assicurazione di responsabilità civile indipendenti dalle fluttuazioni del valore della moneta*, in « Assicurazioni », anno IX, maggio-giugno, 1942.

ovvero, per la (5),

$$\tau = \frac{n}{N}\frac{a}{v}, \tag{7}$$

in cui il rapporto

$$\gamma = \frac{a}{v} \tag{8}$$

sta a rappresentare il *grado medio dei danni*, che varia, evidentemente, nel campo (0,1); ed il rapporto

$$\mu = \frac{n}{N} \tag{9}$$

sta a rappresentare il *numero medio dei sinistri* avvenuti nell'anno imputabili ad ogni rischio assicurato. In altra sede abbiamo dimostrato, limitatamente ai fabbricati urbani per uso di abitazione, che γ è funzione decrescente di v e μ, invece, cresce col crescere di v. L'accrescimento di μ, comunque, è più forte della decrescenza di γ e perciò il loro prodotto, cioè τ, cresce col crescere di v (1).

Indicando con c il *numero dei rischi sinistrati*, cioè i rischi colpiti dal fuoco, e considerando che quello in esame è un *fenomeno ripetibile*, in quanto ogni rischio assicurato può essere colpito nell'anno una o più volte dal fuoco, ne deriva che $c \leqslant n$, l'eguaglianza valendo nel caso particolare in cui ogni rischio sinistrato sia stato colpito una sola volta dal fuoco.

Il rapporto

$$p = \frac{c}{N} \tag{10}$$

sta a rappresentare, di conseguenza, la *frequenza dei rischi sinistrati*, cioè la *frequenza* o *probabilità statistica che un rischio assicurato sia colpito nell'anno almeno una volta dal fuoco.*

Indicando con α il *numero medio dei sinistri imputabili ad ogni rischio sinistrato*, cioè

$$\alpha = \frac{n}{c}, \tag{11}$$

---

(1) R. D'Addario, *Considerazioni sul tasso di premio delle assicurazioni incendi*, in « Annali dell'Istituto di statistica della R. Università di Bari », vol. XVIII, Bari 1940; un riassunto di detta memoria è stato pubblicato in « Assicurazioni », anno VII, marzo-aprile 1940.

sarà

(12) $$a\frac{c}{N} = \frac{n}{N},$$

in cui: $a = 1$ per i *fenomeni non ripetibili* ed $a \geqslant 1$ per i *fenomeni ripetibili*. Da questo segue immediatamente che $\mu = p$ per i fenomeni non ripetibili e $\mu \geqslant p$ per i fenomeni ripetibili.

Per i fenomeni ripetibili, dunque, i due rapporti μ e p esprimono concetti profondamente diversi. Tale differenza, nel caso in esame, i cui sinistri costituiscono un fenomeno ripetibile, non solo non è stata mai avvertita, ma è stato erroneamente assunto il rapporto μ, il cui valore potrebbe superare l'unità, come probabilità statistica del fenomeno.

Il tasso unitario annuale del premio, per la (7), la (8), la (10) e la (11), sarà quindi dato anche da

(13) $$\tau = ap\gamma ,$$

cioè, dal prodotto dei tre fattori: numero medio dei sinistri imputabili ad ogni rischio sinistrato, probabilità che un rischio assicurato sia colpito nell'anno almeno una volta dal fuoco, grado medio dei danni.

Se l'assicurazione è contratta per una frazione r dell'anno, assunto come unità di tempo cui si riferisce τ, si può, non conoscendo il corrispondente tasso τ_r, ammettere, in prima approssimazione, che n ed s si distribuiscono uniformemente nell'anno e quindi

(14) $$\tau_r \simeq r\tau .$$

L'approssimazione, naturalmente, sarà tanto più grande quanto più stretta sarà l'aderenza dell'ipotesi ammessa all'effettivo svolgimento del fenomeno. Se n ed s, invece, presentano forti massimi e forti minimi stagionali lo scarto tra τ_r ed $r\tau$ potrà riuscire a volte positivo, a volte negativo e più o meno tollerabile a seconda della lunghezza e dell'inizio dell'intervallo di tempo per il quale si contrae l'assicurazione.

Se l'assicurazione di un rischio di valore v è contratta per un valore $m < v$, anzichè per l'intero valore v, si ha la cosidetta *sotto assicurazione*, alla quale, *in assenza di particolari clausole contrattuali*, si applica lo stesso tasso τ dell'assicurazione piena, con la condizione, però, che, nel caso che un sinistro provochi un danno di importo x, l'assicuratore verserà all'assicurato, come indennizzo, non x, ma una somma pari ad $\frac{m}{v}x$ (*principio di proporzionalità*).

Nel caso di sotto assicurazione, infatti, assicuratore ed assicurato coassicurano, in un certo senso, lo stesso rischio e come tali debbono quindi partecipare al premio ed al risarcimento dei danni eventuali nella stessa proporzione in cui assumono in coassicurazione il rischio.

Altre volte, invece, per un rischio di valore v, pur contraendo un'assicurazione per un valore $m < v$, si deroga al principio di proporzionalità e si stabilisce, come corrispettivo di un opportuno tasso di premio, l'obbligo da parte dell'assicuratore di risarcire i danni eventuali sino alla concorrenza della somma assicurata m, per cui, se un sinistro provoca un danno di importo x, l'assicuratore risarcisce totalmente il danno se $x \leqslant m$ e paga solo m se $x > m$. È questa la cosidetta *assicurazione a primo fuoco*, il cui tasso di premio, ovviamente, è maggiore del tasso corrispondente alla pura e semplice sotto assicurazione, per la quale vige, come s'è visto, il principio di proporzionalità e si applica lo stesso tasso dell'assicurazione piena.

L'assicurazione a primo fuoco può essere assimilata, tecnicamente, alla riassicurazione dell'eccedente per sinistro ed all'assicurazione di responsabilità civile. Infatti, l'assicuratore assume per ogni sinistro un importo non maggiore di m, mentre l'assicurato assume a suo carico l'eventuale eccedenza $0 < x - m \leqslant v - m$; ovvero, come nell'assicurazione di responsabilità civile, l'assicuratore risarcisce, per ogni sinistro, i danni sino alla concorrenza del massimale di garanzia uguale ad m.

3. — Abbiamo visto, dunque, che si ha assicurazione a primo fuoco quando, per un rischio di valore v, anzichè l'intero valore, si assicura un valore m minore di v, con la condizione che l'assicuratore risarcirà, per ogni sinistro, i danni eventuali sino alla concorrenza della somma assicurata m.

Indicando con $\tau(m)$ il corrispondente tasso di premio, per le posizioni (1) e (3), sarà

$$\tau(m) = \frac{s(m) + mn(m)}{Nm}, \tag{15}$$

ovvero, ponendo

$$a(m) = \frac{s(m) + mn(m)}{n}, \tag{16}$$

sarà ancora

$$\tau(m) = \frac{n}{N}\frac{a(m)}{m} = \mu\frac{a(m)}{m}, \tag{17}$$

ossia, per la (10) e la (12),

$$\tau(m) = ap\frac{a(m)}{m}, \tag{18}$$

da cui appare chiaro che $\tau(m)$, essendo $\mu = ap$ indipendente da m, varia col variare, in funzione di m, del rapporto

$$\gamma(m) = \frac{a(m)}{m}, \tag{19}$$

che diremo, per il suo evidente significato, *grado medio dei risarcimenti.*

Studiamo, quindi, il comportamento di $\gamma(m)$ al variare di m.

Ora, poichè

$$\gamma(m) = \frac{\int_0^m x\varphi(x)dx + m\int_m^v \varphi(x)dx}{nm}, \tag{20}$$

derivando rispetto ad m, si ha

$$\frac{d}{dm}\gamma(m) = -\frac{1}{nm^2}\int_0^m x\varphi(x)dx < 0, \tag{21}$$

cioè, il grado medio dei risarcimenti decresce col crescere di m. Esso, propriamente, da uno, per m tendente a zero, passa, sempre decrescendo e per $m = v$, al valore

$$\gamma = \frac{1}{nv}\int_0^v x\varphi(x)dx = \frac{a}{v},$$

essendo γ, come prima s'è detto, il grado medio dei danni.

Da tutto questo segue, osservando la (17), ovvero la (18), che il tasso $\tau(m)$ decresce col crescere di m. Esso, propriamente, da $\mu = ap$, per m tendente a zero, passa, sempre decrescendo e per

$m = v$, al valore

$$\tau = \mu\gamma = ap\gamma\ ,$$

essendo τ, come si è visto, il tasso di premio relativo ad un'assicurazione piena.

Abbiamo precedentemente visto che il tasso di premio relativo ad una sotto assicurazione soggetta al principio di proporzionalità è uguale a τ. Ora, poichè per $m < v$ è $\tau(m) > \tau$, ne segue, come era a prevedere, che il tasso di premio relativo ad una sotto assicurazione è minore del tasso di premio corrispondente ad una assicurazione a primo fuoco fatte entrambe per un valore $m < v$.

Infine, se l'assicurazione a primo fuoco è contratta per una frazione r dell'anno, assunto come unità di tempo cui si riferisce $\tau(m)$, si può, non conoscendo il corrispondente tasso $\tau_r(m)$, porre, con le avvertenze e le limitazioni fatte a proposito dell'assicurazione piena,

$$\tau_r(m) \simeq r\tau(m)\ . \tag{22}$$

4. — Immaginiamo ora che, dall'epoca t_0, in cui furono calcolati i tassi di premio per i diversi valori di m, ad un'epoca successiva t, siano avvenute delle variazioni nel potere d'acquisto della moneta e proponiamoci di calcolare i nuovi tassi di premio in funzione degli antichi, nelle ipotesi che:

1ª) *il numero medio dei sinistri imputabili ad ogni rischio assicurato, cioè* $\mu = ap$, *sia stabile alle due epoche*;

2ª) *la ripartizione dei sinistri secondo la gravità dei danni da ognuno d'essi causati sia stabile alle due epoche.*

Osserviamo anzitutto che, indicando con x e con z la valutazione monetaria di un *danno della stessa gravità* all'epoca t_0 e rispettivamente all'epoca t, e con σ_t l'indice unitario della variazione dei prezzi dall'epoca t_0 all'epoca t, sarà in media

$$z = \sigma_t x\ , \tag{23}$$

per cui, mentre x varia nel campo $(0, v)$, z varia nel campo $(o, \sigma_t v)$.

Conservando tutte le notazioni precedenti e ponendo:

$$\begin{cases} \gamma(m) = \text{grado medio dei risarcimenti all'epoca } t_0; \\ \bar{\gamma}(m) = \text{grado medio dei risarcimenti all'epoca } t; \\ \tau(m) = \text{tasso del premio all'epoca } t_0; \\ \bar{\tau}(m) = \text{tasso del premio all'espoca } t\ , \end{cases} \tag{24}$$

avremo

$$\tau(m) = \mu\gamma(m) \; ; \tag{25}$$

$$\bar{\tau}(m) = \mu\bar{\gamma}(m) \, , \tag{26}$$

da cui si vede immediatamente che, essendo μ stabile per ipotesi alle due epoche, la variazione del tasso del premio relativo alla stessa somma assicurata m dipende dalla variazione del grado medio dei risarcimenti. Passiamo, quindi, allo studio di questa variazione.

Indicando con $f(x)dx$ la frequenza dei sinistri all'epoca t_0 il cui importo dei danni da ognuno d'essi causati sia compreso tra x ed $x + dx$ e con $g(z)$ la frequenza dei sinistri all'epoca t il cui importo dei danni da ognuno d'essi causati sia compreso tra z e $z + dz$, per la (20) e le posizioni (24) avremo:

$$\gamma(m) = \frac{1}{m}\left[\int_0^m xf(x)dx + m\int_m^v f(x)dx\right] ; \tag{27}$$

$$\bar{\gamma}(m) = \frac{1}{m}\left[\int_0^m zg(z)dz + m\int_m^{\sigma_t v} g(z)dz\right] . \tag{28}$$

Ora, se la ripartizione dei sinistri secondo la gravità dei danni da ognuno d'essi causati è, come si è ammesso, stabile alle due epoche, si dovrà avere:

$$\int_0^z g(z)dz = \int_0^{\frac{z}{\sigma_t}} f(x)dx \; ; \tag{29}$$

$$\int_0^z zg(z)dz = \sigma_t\int_0^{\frac{z}{\sigma_t}} xf(x)dx \, , \tag{30}$$

e quindi, per m variabile nel campo $(o, \sigma_t v)$, sarà

$$\bar{\gamma}(m) = \frac{\sigma_t}{m}\left[\int_0^{\frac{m}{\sigma_t}} xf(x)dx + \frac{m}{\sigma_t}\int_{\frac{m}{\sigma_t}}^v f(x)dx\right] , \tag{31}$$

ovvero, per le posizioni (24),

$$\bar{\gamma}(m) = \gamma\left(\frac{m}{\sigma_t}\right), \tag{32}$$

da cui segue essendo μ per ipotesi stabile alle due epoche,

$$\bar{\tau}(m) = \tau\left(\frac{m}{\sigma_t}\right). \tag{33}$$

5. — Abbiamo precedentemente visto che il tasso $\tau(m)$ decresce col crescere di m. Esso, propriamente, dal limite μ, per m tendente a zero, passa, sempre decrescendo e per $m = v$, al valore $\tau = \mu\gamma$, essendo τ il tasso corrispondente ad un'assicurazione piena.

Ricordando che $\tau(m)$ è definito nel campo $0 < m \leqslant v$, mentre $\bar{\tau}(m)$ è definito, invece, nel campo $0 < m \leqslant \sigma_t v$, dalla (33) si vede immediatamente che $\bar{\tau}(m)$ dal limite μ, per m tendente a zero, passa, sempre decrescendo e per $m = \sigma_t v$, al valore τ, essendo questo, come prima s'è detto, il tasso corrispondente ad un'assicurazione piena.

Dunque:

$$\begin{cases} \lim\limits_{m=0} \bar{\tau}(m) = \lim\limits_{m=0} \tau(m) = \mu \; ; \\ \bar{\tau}(\sigma_t v) = \tau(v) = \tau \, , \end{cases} \tag{34}$$

mentre

$$\begin{cases} \bar{\tau}(m) > \tau(m) \qquad \text{se} \qquad \sigma_t > 1 \; ; \\ \bar{\tau}(m) < \tau(m) \qquad \text{se} \qquad \sigma_t < 1 \, , \end{cases} \tag{35}$$

cioè, per la stessa somma assicurata m, il tasso di premio all'epoca t sarà maggiore o minore del tasso di premio all'epoca t_0, a seconda che nel frattempo il potere d'acquisto della moneta sia diminuito o rispettivamente aumentato.

Da tutto questo segue che, se al tempo t_0 l'assicuratore ha assunto un certo numero di rischi per un periodo poliennale ed al premio annuale $\tau(m)$, in un'epoca successiva t, *ferme rimanendo le condizioni contrattuali* e nelle ipotesi formulate, egli conseguirà un utile o una perdita di congiuntura a seconda che nel frattempo il potere d'acquisto della moneta sia rispettivamente aumentato o diminuito.

Consideriamo, pertanto, la differenza

$$d(m, \sigma_t) = \bar{\tau}(m) - \tau(m) , \tag{36}$$

ovvero, per la (33),

$$d(m, \sigma_t) = \tau\left(\frac{m}{\sigma_t}\right) - \tau(m) , \tag{37}$$

ovvero ancora, per la (27) e la (31),

$$d(m, \sigma_t) = \mu\left[(\sigma - 1)\int_0^{\frac{m}{\sigma_t}} xf(x)dx + \int_{\frac{m}{\sigma_t}}^{m} (m - x)f(x)dx\right] , \tag{38}$$

da cui si vede immediatamente che la differenza $d(m, \sigma_t)$ è positiva, nulla o negativa, a seconda che σ_t sia rispettivamente maggiore, uguale o minore dell'unità, a seconda, cioè, che il potere d'acquisto della moneta sia rispettivamente diminuito, rimasto costante od aumentato.

È bene avvertire, inoltre, che tale differenza è definita nel campo $(0, \sigma_t v)$ per $\sigma_t < 1$ e nel campo $(0, v)$ per $\sigma_t > 1$, in quanto, affinchè si abbia assicurazione a primo fuoco, dovrà essere m minore del valore totale del rischio assicurato.

Consideriamo ora un determinato valore di m e vediamo come varia l'utile o la perdita dell'assicuratore col variare di σ_t.

Derivando la (38) rispetto a σ_t, abbiamo

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_t} d(m, \sigma_t) = \frac{\mu}{m}\int_0^{\frac{m}{\sigma_t}} xf(x)dx > 0 , \tag{39}$$

cioè, il valore della differenza $d(m, \sigma_t)$ cresce col crescere di σ_t, il che vuol dire che l'utile o la perdita dell'assicuratore, a parità di m, sarà tanto più grande quanto maggiore, dal tempo t_0 al tempo t, sarà stato l'apprezzamento o rispettivamente il deprezzamento monetario. La perdita sul tasso di premio, comunque, sarà sempre minore di $\mu - \tau(m)$, in quanto

$$\lim_{\sigma_t = \infty} d(m, \sigma_t) = \lim_{\sigma_t = \infty}\left[\tau\left(\frac{m}{\sigma_t}\right) - \tau(m)\right] = \mu - \tau(m) . \tag{40}$$

Per il guadagno dell'assicuratore sul tasso di premio bisogna distinguere tre casi e cioè, il caso in cui $\sigma_t > \frac{m}{v}$; il caso in cui $\sigma_t = \frac{m}{v}$; ed il caso in cui $\sigma_t < \frac{m}{v}$. Nel primo caso, infatti, si ha assicurazione a primo fuoco, in quanto $m < v\sigma_t$; nel secondo caso, invece, si ha assicurazione piena, in quanto $m = v\sigma_t$; nel terzo caso, infine, si ha sopra assicurazione, in quanto $m > v\sigma_t$. Il guadagno massimo dell'assicuratore sul tasso di premio sarà pertanto dato dal valore di $-d(m, \sigma_t)$ per $\sigma_t = \frac{m}{v}$ e cioè

$$(41) \qquad -d\left(m, \frac{m}{v}\right) = \tau(m) - \tau\,.$$

È bene osservare, però, che nel terzo caso l'assicuratore consegue un guadagno non solo sul tasso di premio, ma anche un guadagno derivante dal fatto che al tempo t si ha sopra assicurazione per una somma pari ad $m - \sigma_t v$, sopra assicurazione fatta, anzichè al tasso τ, ad un tasso maggiore $\tau(m)$. Il guadagno complessivo dell'assicuratore sul premio contrattuale è quindi uguale ad

$$(42) \qquad m\tau(m) - \sigma_t \tau v = \sigma_t v[\tau(m) - \tau] + (m - \sigma_t v)\tau(m)\,,$$

mentre nel primo caso è uguale ad $m\left[\tau(m) - \tau\left(\frac{m}{\sigma_t}\right)\right]$ e nel secondo caso è eguale ad $m[\tau(m) - \tau]$.

6. — La (33), dunque, ci dà il tasso di premio all'epoca t in funzione dei tassi calcolati all'epoca t_0, nelle ipotesi, come si è detto, che:

1ª) *il numero medio dei sinistri per rischio assicurato sia stabile alle due epoche*;

2ª) *la ripartizione dei sinistri secondo la gravità dei danni da ognuno d'essi causati sia stabile alle due epoche.*

Le nostre ipotesi, pertanto, escludono qualsiasi influenza, diretta od indiretta, delle oscillazioni del valore della moneta sulla intensità degli elementi fisici costitutivi del premio, che si presuppongono stabili in un certo intervallo di tempo, e si limitano a considerare l'influenza di tali oscillazioni sulla valutazione monetaria degli elementi stessi e cioè dei danni causati dai sinistri verificatisi alle diverse epoche.

Ora, sino a qual punto tutto questo può ritenersi più o meno aderente alla realtà?

Purtroppo il materiale necessario per rispondere convenientemente alla nostra domanda manca assolutamente o è insufficiente ed embrionale, mentre le indagini statistiche condotte, in vari paesi ed epoche diverse, per l'accertamento di una eventuale relazione tra le variazioni del tasso di premio e le condizioni economiche generali del mercato non sono nè pienamente soddisfacenti nè totalmente conclusive.

Per alcuni paesi, cioè, sarebbe stata accertata una correlazione negativa tra i valori di τ e le condizioni economiche generali del mercato, una correlazione per cui nei periodi di prezzi crescenti e di inflazione monetaria si osserverebbero valori più bassi di τ, e viceversa nei periodi di prezzi decrescenti e di deflazione monetaria si osserverebbero valori più alti di τ, onde, i maggiori danni che si verificherebbero nei periodi di crisi si sogliono denominare « danni congiunturali ».

È stato anche osservato che le oscillazioni del grado medio dei danni, cioè γ, sarebbero molto più forti delle oscillazioni del numero medio dei sinistri per rischio assicurato, cioè μ, che sono tenuissime, e perciò le oscillazioni di τ risentirebbero più specialmente l'influenza delle oscillazioni di γ. Le oscillazioni di τ, μ e γ sarebbero comunque solidali fra loro (1).

Le oscillazioni congiunturali di τ, quindi, più che a supposte variazioni nel numero dei sinistri dolosi — che alcuni ritengono determinati proprio dalle favorevoli o sfaverevoli condizioni economiche generali del mercato — sarebbero forse dovute al maggiore o minore interesse al possesso della cosa assicurata o alla disponibilità del valore monetario della cosa stessa, interesse che indurrebbe l'assicurato a impegnarsi o meno per salvare dalla distruzione totale una parte più o meno grande della cosa colpita dal fuoco e quindi a ridurre o meno il grado medio dei danni.

Per spiegare la detta correlazione sono state avanzate, comunque, parecchie ipotesi, ma a noi basta avere accennato, onde arguire che, mentre la nostra prima ipotesi sulla stabilità nel tempo del valore di μ può essere accettata con un certo fondamento spe-

---

(1) N. Sergowskj, *Introduzione alla teoria dell'assicurazione incendi*, Torino, 1933, pagg. 38-42, 181-182.

rimentale, la seconda ipotesi dovrebbe essere accettata solo in prima approssimazione e con la necessaria prudenza, in attesa di accurate indagini sperimentali sulle fluttuazioni congiunturali del grado medio dei danni.

I dati statistici utilizzati ed il modo con cui alcune delle predette indagini sono state condotte ci rendono scettici o molto dubbiosi sulla esistenza di detta correlazione. Il senso di questa, infatti, e le conclusioni cui siamo pervenuti, ammettendo le nostre ipotesi, farebbero pensare ad una più che larga compensazione, nello stesso tempo, degli utili (o delle perdite) derivanti dalle fluttuazioni monetarie con le correlative perdite (o utili) derivanti da un aumento (o diminuzione) specialmente del grado medio dei danni. Alcuni nostri sondaggi, utilizzando convenientemente un appropriato materiale statistico, non sembra che confermino, come sospettavamo, la detta correlazione. Il problema, insomma, attende ancora di essere chiarito e risolto.

INTORNO AL METODO D'INTERPOLAZIONE DEL LEVER

PACIFICO MAZZONI

1. — Un problema che spesso ha attirato l'attenzione degli Attuari è quello di determinare dei valori approssimati di un'annualità vitalizia relativa a un dato saggio d'interesse, conoscendone i valori relativi ad altri dati saggi. Esso è un aspetto dell'importante problema dell'influenza del saggio d'interesse sui premi e sulle riserve.

Nel presente articolo vogliamo passare in rassegna e discutere alcuni noti metodi d'interpolazione indicati da vari Attuari (metodi del LEVER, del SANTACROCE, interpolazione lineare, logaritmica, armonica), principalmente allo scopo di mettere ancora in luce la praticità e il forte grado di approssimazione che si consegue col metodo del LEVER, nel quale si fa intervenire la *vita matematica*, metodo che riteniamo il preferibile e che è stato in seguito ripreso anche da altri.

In siffatti problemi d'interpolazione gli Attuari si sono occupati, di preferenza, delle *annualità vitalizie*, perchè ad esse si riconducono molte altre importanti funzioni attuariali. Per esempio, il *premio unico* A_x per un'assicurazione in caso di morte per la vita intera si riconduce al vitalizio anticipato a_x mediante la notissima formola:

$$A_x = 1 - d\mathrm{a}_x \,, \tag{1}$$

essendo $d = 1 - v = \dfrac{i}{1+i}$. Il *premio annuo* P_x per la stessa forma di assicurazione è dato dalla relazione:

$$P_x = \frac{1}{\mathrm{a}_x} - d \,, \tag{2}$$

mentre la riserva matematica è data dalla formola:

$$(3) \qquad {}_tV_x = 1 - \frac{a_{x+t}}{a_x}.$$

Queste relazioni si estendono, com'è notissimo, all'ordinaria assicurazione mista. Per questo motivo ci occuperemo soltanto di annualità vitalizie.

2. — Innumerevoli sono i metodi di approssimazione escogitati per determinare l'influenza del saggio d'interesse sulle anannualità vitalizie. Alcuni si basano su *sviluppi in serie*, per esempio in serie di TAYLOR: ci limitiamo a citare un nostro lavoro del 1936 (1) ed uno recente del SANTACROCE nel quale si considera anche lo sviluppo della funzione log a_x (2). Altri metodi si basano su procedimenti grafici: ci limitiamo a citare un lavoro del POUSSIN (3) ed un altro del WEBER (4). Altri metodi, infine, consistono nel considerare, anzichè le variazioni che subisce il vitalizio a_x, le variazioni di un'altra funzione ad essa collegata, la quale vari approssimativamente secondo una legge semplice, per esempio secondo una legge lineare.

Ad esempio, come dimostreremo in seguito, *se, invece di eseguire l'interpolazione per parti proporzionali direttamente sui valori del vitalizio a_x, la si eseguisce sui valori inversi $1 : a_x$, si ottiene in pratica un'approssimazione migliore, come pure si ottiene un'approssimazione migliore se la si eseguisce invece sui valori della funzione log a_x.*

Di tali ultimi metodi d'interpolazione vogliamo occuparci in questo lavoro.

Esistono alcune funzioni della Matematica finanziaria le quali hanno la curiosa proprietà di variare in pratica secondo leggi

(1) P. MAZZONI, *Sull'influenza di scarti costanti della mortalità o del saggio d'interesse nell'assicurazione vita.* « Arch. Scient. del R. Istituto Superiore di Scienze Economiche Commerciali di Bari », vol. IX, 1934-35, edito a Bari nel 1936.

(2) G. SANTACROCE, *Sul calcolo approssimato delle annualità vitalizie.* « Atti del R. Istituto Nazionale delle Assicurazioni », vol. XII, Roma, 1940.

(3) POUSSIN, *Sur l'application des procédés graphiques aux calculs d'assurance.* « Bulletin trimestriel de l'Institut des Actuaires français », tomo XIV, anno 1904, pagg. 161-277.

(4) L. WEBER, *Sur une méthode de calcul rapide des valeurs approchées des annuités viagères temporaires* (stessa rivista, n. 104, anno 1921, pagg. 17-26).

semplici, ad esempio secondo una funzione lineare. Così, la *vita media*, in un certo intervallo di età (dai 10 ai 60 anni), varia, con forte approssimazione, come una funzione lineare dell'età x, cioè viene rappresentata nel piano cartesiano da una linea retta.

Un'altra tale funzione è la *vita matematica*, la quale varia in pratica approssimativamente come una funzione lineare del saggio d'interesse; per questo motivo molti metodi di approssimazione si basano, come vedremo, sulla considerazione della vita matematica.

3. — Facciamo una breve digressione sulla vita matematica.

Ricordiamo che, nella Matematica della *Previdenza*, si chiama *vita matematica* corrispondente al vitalizio posticipato a_x il numero n definito dall'uguaglianza:

$$(4) \qquad a_x = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i},$$

la quale si può brevemente scrivere sotto la forma:

$$(4') \qquad a_x = a_{\overline{n}|},$$

avendo indicato con i il saggio d'interesse. Tale valore n si chiama anche *numero critico* ed ha importanza nella teoria del rischio; esso indica quale ulteriore durata n dovrebbe avere la vita di un individuo di età x che contragga l'assicurazione di un'annualità vitalizia, affinchè l'assicuratore non guadagni e non perda in quel contratto di assicurazione.

La definizione si estende anche alle annualità vitalizie temporanee.

Diversa è invece la definizione nel campo della Matematica del *Credito*. Si usa chiamare *vita matematica* di un'obbligazione una *scadenza media* di obbligazioni aventi scadenze diverse. Se una massa di titoli di valore (nominale) complessivo C_t scade fra t anni (per $t = 1, 2, ..., m$), si chiama *vita matematica* di un'obbligazione il numero n definito dall'uguaglianza:

$$(5) \qquad (1+i)^{-n} = \frac{C_1(1+i)^{-1} + C_2(1+i)^{-2} + ... + C_m(1+i)^{-m}}{C_1 + C_2 + ... + C_m},$$

essendo i quello si assume come saggio di valutazione. Il numero n rappresenta l'epoca unica alla quale dovrebbe essere rimborsata tutta la massa dei titoli, affinchè il loro valore di mercato (*corso*) risulti lo stesso. Quest'ultima vita matematica n può riguardarsi come una *media esponenziale ponderata* delle varie scadenze 1, 2, ..., m, coi pesi rispettivi C_1, C_2, ..., C_m, come si osserva meglio introducendo il fattore di sconto $v = (1 + i)^{-1}$ e scrivendo così la (5):

$$v^n = \frac{C_1 v + C_2 v^2 + \dots + C_m v^m}{C_1 + C_2 + \dots + C_m} \,. \tag{5'}$$

Pur essendo diverse le due definizioni, notiamo che *è possibile ricondurre anche la prima vita matematica alla seconda.*

Infatti, dalla nota relazione, equivalente alla (1):

$$ia_x + (1 + i)A_x = 1 \tag{6}$$

e dall'altra

$$a_x = \frac{1 - v^n}{i} \tag{4''}$$

si deduce:

$$1 - v^n + (1 + i)A_x = 1 \,,$$

da cui si ottiene subito la seguente relazione:

$$A_x = v^{n+1} \,, \tag{7}$$

la quale si può scrivere, ricordando l'espressione del premio unico A_x per l'assicurazione unitaria in caso di morte:

$$\frac{d_x v + d_{x+1} v^2 + d_{x+2} v^3 + \dots}{l_x} = v^{n+1} \,. \tag{7'}$$

Questa formula è del tutto analoga alla (5'), perchè

$$l_x = d_x + d_{x+1} + d_{x+2} + \dots \,,$$

e quindi $n + 1$ rappresenta una scadenza media delle somme d_x, d_{x+1}, d_{x+2}, ..., ossia la quantità $n + 1$ può riguardarsi come una vita matematica nel senso della Matematica del Credito. È così dimostrato che *anche la vita matematica nel campo delle assicurazioni si può ricondurre ad una media esponenziale* (5).

---

(5) Vedasi: C. E. Bonferroni, *Della vita matematica come media esponenziale.* « Annuario del R. Istituto Superiore di Scienze Economiche e Commerciali di Bari », 1924-25, edito a Bari nel 1926.

Segue che le proprietà della vita matematica nel campo delle assicurazioni sono del tutto analoghe a quelle della vita matematica nel campo del Credito.

4. — Vogliamo ricordare un'importante e nota proprietà della vita matematica, sia nel campo del Credito, che della Previdenza. *Se aumenta il saggio d'interesse, la vita matematica certamente diminuisce.*

Più precisamente: *La derivata della vita matematica rispetto al saggio è sempre negativa.*

La proprietà era già stata rilevata empiricamente da tempo e venne da me dimostrata rigorosamente in varie note [6]. In seguito il SIBIRANI dette una dimostrazione più semplice, nel caso delle rendite continue [7]. Il BONFERRONI mostrò come la vita matematica si possa ricondurre a una media esponenziale [8], e quindi la proprietà discende da un'analoga proprietà delle medie esponenziali [9].

Qui vogliamo dare una dimostrazione diretta, molto semplice, di questa nota proprietà, evitando, come viene fatto in altre dimostrazioni, l'uso di speciali disuguaglianze. Essa differisce poco dalla dimostrazione data dal BONFERRONI nel lavoro citato [9].

Se chiamiamo n la *media esponenziale* ponderata fra i numeri $1, 2, \ldots, m$, coi pesi rispettivi $C_1, C_2, \ldots, C_m$, cioè se poniamo:

$$e^{-\delta n} = \frac{\sum_{t=1}^{m} C_t e^{-\delta t}}{\sum_{t=1}^{m} C_t}, \tag{8}$$

[6] P. MAZZONI, *Sulla vita matematica.* « Giornale degli Economisti e Rivista di Statistica », vol. LXIV, novembre 1924.

ID., *Una proprietà della vita matematica.* « Bollettino dell'Unione Matematica Italiana », Bologna, n. 1, 1925.

ID., *Sui vitalizi e sulla vita matematica.* « Annali del R. Istituto Superiore di Scienze Economiche e Commerciali di Bari », annata 1924,25, edito a Bari nel 1926.

[7] F. SIBIRANI, *Una proprietà della vita matematica.* « Bollettino dell'Unione Matematica Italiana », Bologna, 1925.

[8] Vedasi lavoro citato [5].

[9] C. E. BONFERRONI, *La media esponenziale in Matematica finanziaria.* « Annuario del R. Istituto Superiore di Scienze Economiche e Commerciali di Bari », annata 1923-24, edito a Bari nel 1924.

basterà dimostrare che questa media n ha la derivata rispetto a δ negativa, perchè in tal modo verrà dimostrata la proprietà della vita matematica sia nel campo del Credito, che della Previdenza [10].

Dalla (8) si deduce, prendendo i logaritmi dei due membri:

$$n = -\frac{\log \Sigma C_t e^{-\delta t} - \log \Sigma C_t}{\delta}. \tag{9}$$

Derivando rispetto a δ si ha:

$$\frac{dn}{d\delta} = \frac{1}{\delta^2}\left\{\frac{\Sigma t C_t e^{-\delta t}}{\Sigma C_t e^{-\delta t}} \cdot \delta + \log \Sigma C_t e^{-\delta t} - \log \Sigma C_t\right\}. \tag{10}$$

Per dimostrare che questa quantità è negativa, basta provare che è negativa la funzione:

$$f(\delta) = \frac{\Sigma t C_t e^{-\delta t}}{\Sigma C_t e^{-\delta t}} \cdot \delta + \log \Sigma C_t e^{-\delta t} - \log \Sigma C_t,$$

che è la quantità racchiusa tra le graffe. Siccome è $f(0) = 0$, basta dimostrare che è sempre negativa la derivata $f'(\delta)$. Infatti, si ha:

$$f'(\delta) = \frac{-\Sigma t^2 C_t e^{-\delta t} \cdot \Sigma C_t e^{-\delta t} + \Sigma t C_t e^{-\delta t} \cdot \Sigma t C_t e^{-\delta t}}{(\Sigma C_t e^{-\delta t})^2} \cdot \delta. \tag{11}$$

Chiamando brevemente $\varphi(\delta)$ il numeratore e cambiandovi, nella seconda e nella quarta sommatoria, t in x, si ha:

$$\varphi(\delta) = -\sum_{t=1}^{m} t^2 C_t e^{-\delta t} \cdot \sum_{x=1}^{m} C_x e^{-\delta x} + \sum_{t=1}^{m} t C_t e^{-\delta t} \cdot \sum_{x=1}^{m} x C_x e^{-\delta x},$$

ossia:

$$\varphi(\delta) = -\sum_{t=1}^{m}\sum_{x=1}^{m} t^2 C_t C_x e^{-\delta(t+x)} + \sum_{t=1}^{m}\sum_{x=1}^{m} t x C_t C_x e^{-\delta(t+x)}.$$

---

(10) Se si paragona la (5) con la (8), si osserva che nella (5) la quantità i rappresenta un saggio *effettivo* d'interesse, mentre nella (8) la quantità δ rappresenta un saggio *nominale*. Siccome $e^\delta = 1 + i$, si ha $\frac{di}{d\delta} = e^\delta$, e perciò sussiste la seguente relazione fra le due derivate $\frac{dn}{d\delta}$ e $\frac{dn}{di}$:

$$\frac{dn}{d\delta} = \frac{dn}{di} \cdot e^\delta,$$

e ne consegue che il segno di queste due derivate è il medesimo.

Scambiando dappertutto t con x e poi sommando a membro a membro, si ottiene:

$$2\varphi(\delta) = -\sum_{t=1}^{m}\sum_{x=1}^{m}(t^2+x^2)C_tC_xe^{-\delta(t+x)} + \sum_{t=1}^{m}\sum_{x=1}^{m}2txC_tC_xe^{-\delta(t+x)} =$$

$$= -\sum_{t=1}^{m}\sum_{x=1}^{m}(t-x)^2C_tC_xe^{-\delta(t+x)},$$

la quale è una quantità essenzialmente negativa. Perciò anche $f'(\delta)$ è negativa e così è dimostrata in ogni caso la proprietà della vita matematica, come pure la proprietà della media esponenziale.

Analoga è la dimostrazione nel campo continuo. Allora la *scadenza media* n (o *media esponenziale*) viene definita mediante un'equazione della forma:

$$\frac{\int_a^b C_te^{-\delta t}dt}{\int_a^b C_tdt} = e^{-\delta n}. \tag{12}$$

Vogliamo dimostrare che *pure la derivata* $\frac{dn}{d\delta}$ è *negativa*. Infatti, si deduce dalla (12):

$$n = -\frac{\log\int_a^b C_te^{-\delta t}dt - \log\int_a^b C_tdt}{\delta}, \tag{13}$$

da cui si ha:

$$\frac{dn}{d\delta} = \frac{1}{\delta^2}\left\{\frac{\int_a^b tC_te^{-\delta t}dt}{\int_a^b C_te^{-\delta t}dt}\cdot\delta + \log\int_a^b C_te^{-\delta t}dt - \log\int_a^b C_tdt\right\}, \tag{14}$$

che si deve dimostrare essere negativa. Indicando brevemente con $f(\delta)$ la quantità racchiusa tra le graffe, siccome $f(0) = 0$, basterà dimostrare che la derivata $f'(\delta)$ è negativa. Infatti, si ha:

$$f'(\delta) = \frac{-\int_a^b t^2C_te^{-\delta t}dt\cdot\int_a^b C_te^{-\delta t}dt + \int_a^b tC_te^{-\delta t}dt\cdot\int_a^b tC_te^{-\delta t}dt}{\left(\int_a^b C_te^{-\delta t}dt\right)^2}\cdot\delta. \tag{15}$$

Chiamando brevemente $\varphi(\delta)$ il numeratore e cambiandovi t in x nel secondo e nel quarto integrale, si ha:

$$\varphi(\delta) = -\int_a^b\int_a^b t^2 C_t C_x e^{-\delta(t+x)} dt dx + \int_a^b\int_a^b tx C_t C_x e^{-\delta(t+x)} dt dx .$$

Scambiando dappertutto t con x e poi sommando a membro a membro, si ottiene:

$$2\varphi(\delta) = -\int_a^b\int_a^b (t^2 + x^2) C_t C_x e^{-\delta(t+x)} dt dx + \int_a^b\int_a^b 2tx C_t C_x e^{-\delta(t+x)} dt dx =$$

$$= -\int_a^b\int_a^b (t - x)^2 C_t C_x e^{-\delta(t+x)} dt dx ,$$

la quale è una quantità essenzialmente negativa. Così la proprietà della media esponenziale e della vita matematica è dimostrata anche nel campo continuo.

Vogliamo ancora ricordare che *se il saggio d'interesse tende ad annullarsi, la vita matematica nel primo caso* (*Previdenza*) *tende alla vita incompleta* e_x, *e nel secondo caso* (*Credito*) *tende alla media aritmetica ponderata dei numeri* 1, 2, ..., m, *coi pesi rispettivi* C_1, C_2, ..., C_m.

Tanto discende subito dalla (9), applicando la regola di L'HOPITAL.

5. — Ora esponiamo il metodo d'interpolazione del LEVER.

Sino dal 1919 lo STEFFENSEN (11) aveva notato che *la vita matematica relativa a un'annualità vitalizia varia approssimativamente come una funzione lineare del saggio d'interesse.* Basandosi su questa proprietà, il LEVER indicava il seguente metodo d'interpolazione, che chiamiamo metodo del LEVER, per determinare un valore approssimato del vitalizio a_x relativo ad un dato saggio i, conoscendone i valori relativi a due altri dati saggi i_1 ed i_2: si cerchino i valori corrispondenti della vita matematica n_1 ed n_2

(11) J. F. STEFFENSEN, *On certain inequalitiesand Methods of Approssimation.* « Journal of the Institute of Actuaries », vol. LI, n. 271, anno 1919, pagg. 274-297.

relativi ai saggi dati i_1 ed i_2, cioè i valori dedotti dalle relazioni:

(16) $$a_x(i_1) = \frac{1-(1+i_1)^{-n_1}}{i_1},$$

(16′) $$a_x(i_2) = \frac{1-(1+i_2)^{-n_2}}{i_2};$$

supposto allora che la vita matematica n vari come una funzione lineare del saggio d'interesse, si otterrà il suo valore approssimato n relativo ad un altro saggio i mediante un'interpolazione lineare, partendo dai due valori trovati n_1 ed n_2:

(17) $$n = n_1 + \frac{n_2 - n_1}{i_2 - i_1}(i - i_1);$$

come valore approssimato del vitalizio relativo al saggio i si assuma, infine, quello dato dalla (4), cioè:

$$a_x(i) = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i},$$

nella quale al posto di n si ponga il suo valore approssimato dato dalla (17).

In questo consiste il metodo d'interpolazione del Lever (12): in altre parole, *invece di eseguire l'interpolazione per parti proporzionali sui valori del vitalizio, la si eseguisce sui valori corrispondenti della vita matematica.*

Il metodo si estende immediatamente alle rendite vitalizie *temporanee* e si estende ancora alle assicurazioni *in caso di morte* e alle assicurazioni *miste*. Infatti, dalla (7) si osserva che il valore della vita matematica n che corrisponde al vitalizio è quello stesso che corrisponde al premio unico A_x per l'assicurazione in caso di morte. Nel caso di premi annui, basta assumere, per la (2), come valore approssimato di $\frac{1}{a_x}$ quello che risulta dal metodo del Lever. Analogamente per le assicurazioni miste, cioè invece d'interpolare linearmente sui valori del premio unico $A_{x,\overline{m}|}$ s'inter-

(12) E. H. Lever, *On obtaining values of Life Annuities at isolated rates of interest.* (Stessa rivista), vol. LII, n. 274, anno 1920, pagg. 171-179.

pola sui valori corrispondenti della vita matematica n definiti dalla relazione:

$$A_{x,\,\overline{m}|} = v^{n+1}\,. \qquad (18)$$

Il metodo del LEVER viene indicato anche dal GAUTHIER ([13]) e dal LENZI ([14]). Il LENZI lo applica per le annualità *anticipate*, ciò che è poi la stessa cosa nel caso di vitalizi *per la vita intera*, ma non è esattamente la stessa cosa per i vitalizi *temporanei* ([15]).

Nel 1925 dimostrai rigorosamente che il metodo del LEVER dà certamente risultati migliori dell'interpolazione per parti proporzionali (eseguita direttamente sui vitalizi), sia nelle assicurazioni continue che nelle discontinue (almeno quando il saggio d'interesse non ecceda certi limiti che in pratica non vengono mai sorpassati) ([16]). La ricerca venne basata sullo studio delle derivate seconde delle due funzioni a_x ed n, pensate come funzioni del saggio i, perchè gli errori commessi dipendono appunto da tali derivate seconde ([17]).

6. — Esponiamo un esempio pratico. Supposti conosciuti i valori del vitalizio a_x (secondo le Tavole del *Text-Book* del KING) ai due saggi d'interesse del 3% e del 5%, calcoliamo i valori approssimati del vitalizio relativi al saggio del 4%, applicando di-

---

([13]) M. GAUTHIER, *Note sur le changement de taux dans le calcul d'annuité* (Bulletin trimestriel de l'Institut des Actuaires français, n. 106, anno 1921, pagg. 47-53).

([14]) E. LENZI, *Problemi sulle rendite vitalizie e loro risoluzioni.* « Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari », vol. II, Roma, 1931, pag. 48.

([15]) Infatti, se poniamo, come fa il LENZI: $\mathrm{a}_x = \mathrm{a}_{\overline{n}|}$, ne deduciamo, notoriamente:

$$1 + a_x = a_{\overline{n-1}|} + 1\,,$$

da cui $a_x = a_{\overline{n-1}|}$. Dunque fra le due vite matematiche relative alle annualità anticipate e posticipate vi è la differenza di *un anno*. Invece per i vitalizi temporanei o differiti la differenza $\mathrm{a}_x - a_x$ non è più uguale all'unità.

([16]) P. MAZZONI, *Sulle rendite vitalizie e sul metodo d'interpolazione del* LEVER. « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », tomo XLIX, anno 1925.

([17]) Il GAUTHIER pure ha tentato di giustificare il metodo del LEVER, mostrando che la derivata n'' è nulla quando la funzione di sopravvivenza sia quella di DE MOIVRE, cioè lineare (loco citato). In un mio successivo lavoro mostrai che n'' può risultare positiva, negativa o nulla. (*Sul metodo d'interpolazione del* LEVER. « Giornale degli Economisti e Rivista di Statistica », settembre 1926 »).

versi metodi d'interpolazione: quello del LEVER, quello del SANTACROCE, l'interpolazione *lineare*, la *logaritmica* e l'*armonica*.

Nel primo metodo (LEVER) si può passare dal valore di a_x a quello corrispondente della vita matematica n, e viceversa, mediante la formola:

$$n = \frac{\text{Colog}\,(1 - i a_x)}{\text{Log}\,(1 + i)} \tag{19}$$

(logaritmi decimali); oppure, come fa il LENZI, si può usare un prontuario dei valori attuali dell'annualità certa posticipata $a_{\overline{m}|}$ nel quale figurino i tre saggi i_1, i_2, i, interpolando linearmente ogni volta, per passare dai valori di a_x a quelli di n, e viceversa. In pratica è indifferente adoperare i logaritmi oppure un prontuario, perchè i risultati, fino alla terza cifra decimale di a_x, sono i medesimi.

Il metodo del SANTACROCE, il primo del lavoro citato (2), consiste nell'eseguire l'interpolazione lineare, anzichè sui valori del vitalizio, sui valori corrispondenti della media esponenziale λ definita dalla relazione:

$$\frac{\Sigma l_{x+t} e^{-\delta t}}{\Sigma l_{x+t}} = e^{-\delta \lambda} \tag{20}$$

(ossia brevemente $\frac{a_x}{e_x} = e^{-\delta\lambda}$) (18).

L'*interpolazione logaritmica* consiste nell'eseguire l'interpolazione lineare, anzichè sui valori di a_x, sui valori corrispondenti della funzione *Log* a_x. Nel caso che il saggio i sia la media aritmetica fra i_1 e i_2, ciò equivale ad assumere come valore approssimato di a_x relativo al saggio i la *media geometrica* fra i valori dati ai saggi i_1 e i_2.

L'*interpolazione armonica* consiste nell'eseguire invece l'interpolazione lineare sui valori corrispondenti di $\frac{1}{a_x}$. Se i è la media aritmetica fra i_1 e i_2, allora ciò equivale ad assumere la *media armonica* fra i valori dati ai saggi i_1 e i_2.

Si constata che in tutti questi metodi si ottiene in pratica un'approssimazione migliore di quando s'interpola direttamente per parti proporzionali sui valori del vitalizio a_x.

---

(18) La proprietà di λ di essere una funzione decrescente di δ, dimostrata dal SANTACROCE, non è altro che la nota proprietà della media esponenziale.

Riportiamo nel seguente prospetto i valori approssimati ottenuti per il vitalizio al 4% coi suddetti metodi, per paragonarli coi valori esatti.

Età	Valori dati di a_x al		Valori approssimati del vitalizio a_x al 4% secondo i metodi di					Valori esatti al 4%
					Interpolazione			
x	3%	5%	LEVER	SANTA-CROCE	lineare	logarit.	armon.	
25	21,025	15,561	17,951	17,926	18,293	18,088	17,885	17,949
35	18,613	14,298	16,222	16,208	16,455	16,314	16,173	16,221
45	15,591	12,492	13,903	13,894	14,041	13,956	13,871	13,900
55	12,072	10,119	11,027	11,021	11,090	11,051	11,010	11,024
65	8,395	7,361	7,851	7,848	7,878	7,861	7,844	7,850

Come si osserva, la migliore approssimazione si consegue sempre col metodo del LEVER, l'errore non superando mai, in quest'esempio, 0,003, che costituisce uno scarto, nei valori del vitalizio, accettabile in pratica.

Meno buona è l'approssimazione che si consegue col metodo del SANTACROCE, ma pur sempre discreta, almeno per le *annualità temporanee* e quando non sia grande la differenza tra i saggi iniziali i_1 e i_2.

Ancora meno buona è l'approssimazione che si consegue mediante l'interpolazione *logaritmica* e l'interpolazione *armonica*, però sempre migliore, in pratica, di quella che si consegue mediante l'interpolazione lineare eseguita direttamente sui valori del vitalizio.

Si conclude con la constatazione che *il migliore metodo d'interpolazione, tra quelli sopra indicati, è quello del* LEVER, *basato sulla vita matematica, per l'ottima approssimazione che si consegue e per la sua comodità di applicazione.*

Si osserva che in pratica, quando i sia compreso tra i_1 e i_2, il metodo del LEVER fornisce risultati leggermente *per eccesso*; però non è possibile dare una dimostrazione generale di questa proprietà, per il motivo che la derivata seconda n'' della vita matematica rispetto al saggio può risultare, teoricamente, positiva, negativa o nulla, dal suo segno dipendendo se l'approssimazione è per difetto o per eccesso.

Il metodo per SANTACROCE fornisce invece valori *per difetto*; ma anche in questo caso non è possibile dare una dimostrazione generale della proprietà, potendo risultare λ'' positiva, negativa o nulla.

Altrettanto dicasi per l'interpolazione *armonica*, che fornisce in pratica valori *per difetto*; però anche di questa proprietà non può darsi una dimostrazione generale, perchè è facile trovare degli esempi in cui dia invece un'approssimazione *per eccesso*.

7. — Si può invece dimostrare rigorosamente che *l'interpolazione logaritmica fornisce sempre valori approssimati del vitalizio per eccesso quando i sia compreso tra i_1 e i_2 e per difetto nel caso contrario, e che dà sempre un'approssimazione migliore dell'interpolazione lineare, purchè i saggi i_1, i_2, i siano abbastanza vicini tra loro.*

Chiamando brevemente a il valore esatto del vitalizio ed a_1 quello approssimato che si ottiene mediante interpolazione *lineare*, è noto che l'errore $a_1 - a$ è dato dalla formola:

$$a_1 - a = \frac{1}{2}(i - i_1)(i_2 - i)a''(\xi)\,, \tag{21}$$

in cui $a''(\xi)$ indica il valore della derivata seconda di a in un certo punto intermedio fra i saggi i, i_1, i_2. Se i è compreso tra i due saggi i_1 e i_2, ed a'' si mantiene *positiva*, allora è $a_1 > a$, ossia il valore a_1 è approssimato *per eccesso*; se invece a'' è *negativa*, allora è $a_1 < a$ e l'approssimazione è *per difetto*. Il contrario accade quando i sia esterno all'intervallo i_1, i_2 (19).

Chiamiamo a_2 il valore approssimato che si ottiene mediante l'interpolazione *logaritmica*; sarà, analogamente:

$$\log a_2 - \log a = \frac{1}{2}(i - i_1)(i_2 - i)\frac{d^2 \log a}{di^2}\,, \tag{22}$$

la derivata seconda essendo calcolata in un punto intermedio. Dal segno di essa dipende se l'approssimazione è per eccesso o per

(19) Vedremo tra poco che, nel caso delle annualità vitalizie, a'' è effettivamente positiva; per questo motivo l'interpolazione *lineare* eseguita direttamente sui vitalizi dà sempre risultati *per eccesso* quando i sia compreso tra i_1 e i_2, e *per difetto* nel caso contrario.

difetto. Derivando, si ottiene:

$$\frac{d \log a}{di} = \frac{a'}{a}\,; \tag{23}$$

$$\frac{d^2 \log a}{di^2} = \frac{a''a - a'^2}{a^2}\,, \tag{24}$$

i logaritmi essendo sempre naturali. Dimostriamo che *questa derivata seconda è sempre positiva.*

Infatti, posto, per brevità:

$$a = \Sigma p_t v^t\,, \tag{25}$$

con $v = (1 + i)^{-1}$, si ottiene, derivando successivamente rispetto ad i:

$$a' = -\Sigma t p_t v^{t+1}\,, \tag{26}$$

$$a'' = \Sigma t(t+1) p_t v^{t+2}\,. \tag{27}$$

Si ottiene allora per la quantità $a''a - a'^2$ l'espressione:

$$a''a - a'^2 = \Sigma\, t(t+1) p_t v^{t+2} \cdot \Sigma p_y v^y - \Sigma t p_t v^{t+1} \cdot \Sigma y p_y v^{y+1}\,,$$

ossia:

$$a''a - a'^2 = \Sigma\Sigma t(t+1) p_t p_y v^{t+y+2} - \Sigma\Sigma t y p_t p_y v^{t+y+2}\,.$$

Scambiando dappertutto t con y e poi sommando a membro a membro, si ottiene:

$$2(a''a - a'^2) = \Sigma\Sigma (t^2 + y^2 + t + y - 2ty) p_t p_y v^{t+y+2} \tag{28}$$

e questa è una quantità essenzialmente positiva. Per la (24), è dimostrato che la derivata seconda di *log a* è sempre positiva e quindi l'interpolazione logaritmica fornisce sempre risultati *per eccesso* quando i sia compreso tra i_1 e i_2, *e per difetto* nel caso contrario.

Per dimostrare che essa fornisce risultati migliori dell'interpolazione lineare, chiamiamo brevemente ε la differenza $\log a_2 - \log a$. Ne discende:

$$\log \frac{a_2}{a} = \varepsilon$$

e quindi: $\frac{a_2}{a} = e^{\varepsilon}$, che si sviluppa:

$$\frac{a_2}{a} = 1 + \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2} + \dots .$$

Quando i tre saggi i, i_1, i_2 sono abbastanza ravvicinati tra loro, allora sono trascurabili le potenze di ε superiori alla prima e si può scrivere:

$$a_2 \backsimeq a(1 + \varepsilon),$$

da cui:

$$a_2 - a \backsimeq a\varepsilon.$$

Ma l'errore ε è dato dalle (22) e (24); perciò l'ordine di grandezza della differenza $a_2 - a$ è la quantità:

$$(22') \qquad a_2 - a \backsimeq \frac{1}{2}(i - i_1)(i_2 - i)\,\frac{a''a - a'^2}{a}.$$

Invece l'ordine di grandezza della differenza $a_1 - a$ è dato dalla (21). Ne consegue che l'ordine di grandezza del rapporto $\frac{a_2 - a}{a_1 - a}$ è dato dalla quantità:

$$(29) \qquad \frac{a_2 - a}{a_1 - a} \backsimeq \frac{a''a - a'^2}{a''a}.$$

Questa frazione, come si è visto, è positiva ed evidentemente è inferiore all'unità. Si conclude che l'errore $a_2 - a$ è minore di $a_1 - a$, quando i saggi i, i_1, i_2 siano abbastanza ravvicinati tra loro; ossia che l'interpolazione logaritmica dà risultati migliori dell'interpolazione lineare.

8. — Ora occupiamoci brevemente dell'interpolazione *armonica* sui vitalizi. Chiamiamo a_3 il valore approssimato del vitalizio che si ottiene mediante l'interpolazione armonica; sarà:

$$(30) \qquad \frac{1}{a_3} - \frac{1}{a} = \frac{1}{2}(i - i_1)(i_2 - i)D^2\left(\frac{1}{a}\right),$$

in cui la derivata seconda (rispetto ad i) va calcolata in un punto intermedio. Derivando, si ottiene:

$$(31) \qquad D\frac{1}{a} = -\frac{a'}{a^2},$$

(32) $$D^2\frac{1}{a}=-\frac{a''a-2a'^2}{a^3}.$$

Ma si ha:

$$\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a}=-\frac{a_3-a}{aa_3},$$

e perciò, per le (30) e (32), l'ordine di grandezza dell'errore a_3-a è la quantità:

(33) $$a_3-a \backsimeq -a^2\left(\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a}\right)\backsimeq -\frac{1}{2}(i-i_1)(i_2-i)\frac{a''a-2a'^2}{a}.$$

Invece l'ordine di grandezza della differenza a_1-a è dato dalla (21). Ne consegue che l'ordine di grandezza del rapporto $\frac{a_3-a}{a_1-a}$ è dato dalla quantità:

(34) $$\frac{a_3-a}{a_1-a}\backsimeq\frac{a''a-2a'^2}{a''a}.$$

Il secondo membro può risultare, in pratica, positivo, negativo o nullo; dimostriamo che in ogni caso esso è, in valore assoluto, inferiore all'unità. Infatti, se il secondo membro è positivo, esso è evidentemente inferiore all'unità. Se invece è negativo, vediamo subito che è:

$$2a'^2-a''a<a''a:$$

ciò discende dal fatto che la quantità (28) è essenzialmente positiva e che perciò è: $a'^2<a''a$. È così dimostrato che *se i tre saggi i, i_1, i_2 sono abbastanza ravvicinati tra loro, l'interpolazione armonica sui vitalizi fornisce sempre risultati migliori dell'interpolazione lineare eseguita direttamente sui vitalizi.*

9. — Terminiamo con alcune semplici osservazioni. I precedenti metodi d'interpolazione, tranne quello del LEVER, si possono estendere anche alle *rendite certe*, e sussistono ancora le proprietà dimostrate dell'interpolazione *logaritmica* e dell'interpolazione *armonica*, di fornire un'approssimazione migliore dell'interpolazione lineare.

Questi ultimi due metodi possono ancora utilmente applicarsi per la risoluzione dei problemi inversi, cioè per la *determinazione del saggio d'interesse, conoscendo il valore attuale dell'annualità.*

Infine, tra i metodi d'interpolazione che presuppongono la conoscenza dei valori dell'annualità a *un solo saggio d'interesse* e permettono di determinare i valori approssimati relativi ad un altro saggio qualsiasi, vogliamo ricordare il metodo del SANTACROCE, il secondo del suo lavoro citato (²). Tale metodo consiste nello *sviluppare in serie di* TAYLOR, *anzichè la funzione* a_x, *la funzione* $\log a_x$, *limitandoci ai primi tre termini dello sviluppo*, ed è interessante per l'ottima approssimazione che così si consegue, anche se in pratica risulta piuttosto complicato nell'applicazione, a meno che non vengano appositamente preparate prima delle tabelle dei valori di certe quantità ivi indicate con I_1 ed I_2.