

UN METODO
PER LA RAPPRESENTAZIONE ANALITICA
DELLE DISTRIBUZIONI STATISTICHE

RAFFAELE D'ADDARIO

1. Sia $f(x)$ l'equazione della densità della frequenza della variabile x , definita nel campo (x_0, k) , ovvero (x_0, ∞) , essendo $x_0 \geq 0$.

Consideriamo la *media dei valori non minori di x* , cioè

$$[1] \quad \varphi(x) = \frac{\int_x^{\infty} \tau f(\tau) d\tau}{\int_x^{\infty} f(\tau) d\tau},$$

e studiamone brevemente il comportamento al variare di x .

Derivando abbiamo

$$[2] \quad \varphi'(x) = \frac{\int_x^{\infty} \tau f(\tau) d\tau - x \int_x^{\infty} f(\tau) d\tau}{\left[\int_x^{\infty} f(\tau) d\tau \right]^2} f(x),$$

da cui si vede che il segno di $\varphi'(x)$ dipende dal valore della differenza

$$[3] \quad \varepsilon(x) = \int_x \zeta f(\zeta) d\zeta - x \int_x f(\zeta) d\zeta,$$

che, evidentemente, assume valori positivi per ogni x interno al campo di variabilità.

La media dei valori non minori di x , quindi, cresce col crescere di x . Essa, propriamente, dal valore $A = \varphi(x_0)$ (valore medio complessivo) tende, sempre crescendo, a k , ovvero all'infinito, a seconda che l'estremo destro del campo di variabilità sia k o rispettivamente l'infinito. Infatti

$$[4] \quad \lim_{x=k} \varphi(x) = \lim_{x=k} \frac{\int_x^k \zeta f(\zeta) d\zeta}{\int_x^k f(\zeta) d\zeta} = \frac{kf(k)}{f(k)} = k.$$

Analogamente

$$[5] \quad \lim_{x=\infty} \varphi(x) = \lim_{x=\infty} \frac{\int_x^\infty \zeta f(\zeta) d\zeta}{\int_x^\infty f(\zeta) d\zeta} = \lim_{x=\infty} \frac{xf(x)}{f(x)} = \infty$$

Inoltre da

$$[3] \quad \varepsilon(x) = \int_x \zeta f(\zeta) d\zeta - x \int_x f(\zeta) d\zeta > 0,$$

segue immediatamente

$$[6] \quad \frac{\int_x z f(z) dz}{\int_x f(z) dz} > x,$$

cioè, per ogni valore di $x < k$ (ovvero $x < \infty$), è

$$\varphi(x) > x,$$

mentre, per x tendente a k (se k è l'estremo destro del campo di variabilità),

$$[4] \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = k;$$

ovvero, per x tendente all'infinito (se l'infinito è l'estremo destro del campo di variabilità),

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = \infty.$$

In conclusione, la media dei valori non minori di x :

- a) cresce col crescere di x ;
- b) dal valore A (valore medio complessivo), per $x = x_0$, tende, sempre crescendo, ad un valore uguale all'estremo destro del campo di variabilità quando x tende a questo estremo;
- c) è sempre maggiore di x per ogni valore di x interno al campo di variabilità.

2. Risolviamo ora il problema inverso: *passare dall'equazione che dà la media dei valori non minori di x alla corrispondente equazione della densità della frequenza.*

Dalla [1], cioè

$$[1] \quad \varphi(x) = \frac{\int_x z f(z) dz}{\int_x f(z) dz},$$

liberando dal denominatore, abbiamo

$$\varphi(x) \int_x f(z) dz = \int_x z f(z) dz;$$

e derivando ambo i membri rispetto ad x abbiamo ancora

$$\varphi'(x) \int_x f(z) dz - \varphi(x) f(x) = -x f(x);$$

ossia

$$[\varphi(x) - x] f(x) = \varphi'(x) \int_x f(z) dz,$$

da cui

$$\frac{f(x)}{\int_x f(z) dz} = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x) - x},$$

cioè

$$[7] \quad \frac{d}{dx} \log \int_x f(z) dz = - \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x) - x}.$$

Infine, integrando tra x_0 ed x , abbiamo

$$[8] \quad \log \int_x f(\zeta) d\zeta = - \int_{x_0}^x \frac{\varphi'(\zeta)}{\varphi(\zeta) - \zeta} d\zeta$$

ovvero, passando dai logaritmi ai numeri, abbiamo ancora

$$[9] \quad \int_x f(\zeta) d\zeta = e^{- \int_{x_0}^x \frac{\varphi'(\zeta)}{\varphi(\zeta) - \zeta} d\zeta}$$

da cui, derivando rispetto ad x , abbiamo infine

$$[10] \quad f(x) = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x) - x} e^{- \int_{x_0}^x \frac{\varphi'(\zeta)}{\varphi(\zeta) - \zeta} d\zeta}$$

Sicchè, mentre la [1] ci consente di passare dall'equazione della densità della frequenza alla corrispondente equazione che dà la media dei valori non minori di x , la [10], viceversa, ci consente di passare dall'equazione che dà la media dei valori non minori di x alla corrispondente equazione della densità della frequenza.

3. Il procedimento esposto — passaggio dall'equazione che dà la media dei valori non minori di x alla corrispondente equazione della densità della frequenza — può essere utilizzato ai fini della rappresentazione analitica delle distribuzioni di frequenze. Ecco come.

Poniamo:

$N(x)$ = numero dei valori non minori di x ;

$C(x)$ = somma dei valori non minori di x ;

$m(x)$ = media dei valori non minori di x , cioè

$$m(x) = \frac{C(x)}{N(x)} .$$

Sia data, ora, una distribuzione empirica di cui conosciamo i seguenti valori:

x_0	$\bar{N}(x_0)$	$\bar{C}(x_0)$
x_1	$\bar{N}(x_1)$	$\bar{C}(x_1)$
x_2	$\bar{N}(x_2)$	$\bar{C}(x_2)$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
.	.	.
x_s	$\bar{N}(x_s)$	$\bar{C}(x_s)$

in cui $x_i < x_{i+1}$.

Da essa ricaviamo immediatamente la seguente successione:

x_0	$\bar{m}(x_0)$
x_1	$\bar{m}(x_1)$
x_2	$\bar{m}(x_2)$
.	.
.	.
.	.
.	.
x_s	$\bar{m}(x_s)$

Cioè, ad ogni valore osservato di x corrisponde un valore di $\bar{m}(x)$. Si hanno, quindi, $s + 1$ punti di coordinate $[x_i, \bar{m}(x_i)]$ fra i quali si fa passare una conveniente curva di equazione

$$m = \varphi(x),$$

per cui, in definitiva, avremo, per la [9], la seguente equazione rappresentatrice della distribuzione osservata

$$[11] \quad N(x) = \bar{N}(x_0) e^{-\int_{x_0}^x \frac{\varphi'(\zeta)}{\varphi(\zeta) - \zeta} d\zeta}$$

ove $\bar{N}(x_0)$ è il numero complessivo dei valori osservati.

E' facile vedere che

$$[12] \quad \int_{x_0}^x \frac{\varphi'(\zeta)}{\varphi(\zeta) - \zeta} d\zeta = \log \frac{\varphi(x) - x}{\varphi(x_0) - x_0} + \int_{x_0}^x \frac{1}{\varphi(\zeta) - \zeta} d\zeta,$$

sicchè, ponendo

$$[13] \quad F(x) = \frac{N(x)}{\bar{N}(x_0)},$$

per la [11] e la [12] avremo

$$[14] \quad F(x) = \frac{\varphi(x_0) - x_0}{\varphi(x) - x} e^{-\int_{x_0}^x \frac{1}{\varphi(\zeta) - \zeta} d\zeta}$$

Si arguisce, da quanto precede, che la ricerca sarà proficua se l'equazione $\varphi(x)$ si adatti bene ai punti osservati $[x_i, \bar{m}(x_i)]$, ed in quanto la *determinazione statistica di-*

retta della forma di $\varphi(x)$, attraverso la quale si passa alla corrispondente $F(x)$, sia più facile e più conveniente della *determinazione statistica diretta* della equazione $F(x)$.

E' a prevedere, comunque, date le proprietà di cui gode la $\varphi(x)$, che parecchie volte sarà più facile determinare direttamente la forma di detta funzione anzichè la forma di $F(x)$.

Un pregio del metodo esposto, che denomineremo *metodo della media dei valori eccedenti*, sta nel fatto che per la ricerca della funzione interpolatrice si utilizzano *sistematicamente* non solo i valori osservati di x ed $N(x)$, come solitamente si fa, ma ben anche i valori osservati di $C(x)$, i cui valori teorici sono dati da

$$[15] \quad C(x) = \varphi(x) N(x)$$

e quindi, per la [11], da

$$[16] \quad C(x) = \varphi(x) \bar{N}(x_0) e^{-\int_{x_0}^x \frac{\varphi'(\tau)}{\varphi(\tau) - \tau} d\tau}$$

Ponendo

$$[17] \quad R(x) = \frac{C(x)}{C(x_0)},$$

avremo immediatamente

$$[18] \quad R(x) = \frac{F(x)}{\varphi(x_0)},$$

in cui $F(x)$, come prima s'è detto, sta a rappresentare la frequenza dei valori non minori di x ed $R(x)$ la frazione del carattere complessivo corrispondente ad $F(x)$.

Da tutto ciò ricaviamo che le equazioni parametriche della corrispondente *curva superiore di concentrazione* saranno le seguenti:

$$[14] \quad F(x) = \frac{\varphi(x_0) - x_0}{\varphi(x) - x} e^{-\int_{x_0}^x \frac{1}{\varphi(\zeta) - \zeta} d\zeta} ;$$

$$[19] \quad R(x) = \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)} \frac{\varphi(x_0) - x_0}{\varphi(x) - x} e^{-\int_{x_0}^x \frac{1}{\varphi(\zeta) - \zeta} d\zeta}$$

4. Sull'espressione analitica generale di $\varphi(x)$, oltre le proprietà menzionate, nulla possiamo dire, in quanto essa, ovviamente, varia col variare della distribuzione osservata cui si riferisce.

Tuttavia, ammettendo che $\varphi(x)$ sia sviluppabile in serie, potremo scrivere

$$[20] \quad \varphi(x) = \varphi[x_0 + (x - x_0)] = A_0 + A_1(x - x_0) + \\ + A_2(x - x_0)^2 + A_3(x - x_0)^3 + \dots ,$$

in cui x_0 è il valore minimo che la variabile x può assumere ed A_0 , evidentemente, è il valore medio complessivo, che si ha quando $x = x_0$.

Ammettendo, quindi, tale sviluppo, potremo, a seconda della rapidità di convergenza della serie e delle esigenze pratiche, fermarci a quel termine che assicuri il desiderato grado di approssimazione dei valori calcolati ai valori osservati.

La determinazione numerica dei parametri $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, \dots$ non presenta alcuna difficoltà, in quanto essi compaiono linearmente e perciò può essere usato, con facilità, un qualsiasi metodo di interpolazione.

Ora, pur non volendo qui discutere la convenienza o meno di tale ricorso e le condizioni di validità dell'ipotesi stessa della sviluppabilità in serie, si può bene affermare che una formulazione generale e quasi meccanica della $\varphi(x)$ non è, data la natura e lo scopo del problema, nè possibile nè desiderabile.

L'esperienza, d'altra parte, sta a provarci che spesso, nei problemi di rappresentazione analitica delle distribuzioni statistiche, una indovinata combinazione di funzioni elementari conduce a risultati sorprendenti.

Una formulazione generale di $\varphi(x)$, infine, non può essere data, in quanto molte volte la scelta è influenzata dal bisogno che $\varphi(x)$ sia sottoposta con facilità e speditezza a tutti quei precedenti analitici particolarmente interessanti la indagine concreta; ovvero $\varphi(x)$ è subordinata a certi criteri logico-probabilistici al fine di dare alla corrispondente $f(x)$ un fondamento razionale.

A noi, in conclusione, basta conoscere le proprietà generali della funzione $\varphi(x)$. L'ultima parola — la ricerca di un eventuale invariante, regola direttrice nel groviglio e nel disordine apparenti — è riservata all'intuito ed alla perizia di chi è preposto al calcolo, che farà tesoro di tutti gli accorgimenti suggeriti dalla metodologia statistica e soprattutto della conoscenza del fenomeno concreto oggetto di studio e delle sue correlazioni con altri fenomeni meglio conosciuti e studiati.

5. Consideriamo, a titolo di esempio, i primi due termini dello sviluppo [20], cioè

$$[21] \quad \varphi(x) = A_0 + A_1(x - x_0),$$

in cui i parametri A_0 ed A_1 possono assumere, come è facile vedere, solamente valori positivi. Infatti per ipotesi $x_0 \geq 0$ e

quindi $A_0 > 0$. Inoltre, derivando, abbiamo

$$[22] \quad \varphi'(x) = A_1,$$

dal che segue, dovendo essere $\varphi'(x) > 0$, $A_1 > 0$.

Distinguiamo il caso in cui x varia nel campo (x_0, ∞) , dal caso in cui x varia nel campo (x_0, k) essendo k un numero finito.

Nel primo caso, cioè quando x varia nel campo (x_0, ∞) , dovrà essere in tutto il campo

$$[23] \quad A_0 + A_1(x - x_0) > x,$$

da cui segue

$$[24] \quad A_1 > \frac{x - A_0}{x - x_0}.$$

Ponendo

$$[25] \quad \Psi(x) = \frac{x - A_0}{x - x_0},$$

è facile vedere che tale rapporto cresce col crescere di x .

Infatti, derivando, abbiamo

$$[26] \quad \Psi'(x) = \frac{A_0 - x_0}{(x - x_0)^2} > 0.$$

Da ciò segue che il limite superiore della classe dei valori che può assumere $\Psi(x)$ è dato da

$$[27] \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \Psi(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - A_0}{x - x_0} = 1$$

e quindi, affinchè resti soddisfatta la diseuguaglianza [23] dovrà essere $A_1 \geq 1$.

Passiamo ora al caso in cui x varia nel tempo (x_0, k) , essendo k un numero finito.

In questo caso, in tutto il campo (x_0, k) , dovrà essere

$$[28] \quad x < A_0 + A_1(x - x_0) \leq k,$$

da cui segue

$$[29] \quad \frac{x - A_0}{x - x_0} < A_1 \leq \frac{k - A_0}{x - x_0}$$

La funzione

$$[30] \quad \Psi(x) = \frac{x - A_0}{x - x_0},$$

come abbiamo visto, cresce col crescere di x . Onde, perchè sia

$$[30] \quad \frac{x - A_0}{x - x_0} < A_1$$

dovrà essere

$$[31] \quad \frac{k - A_0}{k - x_0} \leq A_1$$

Inoltre, il rapporto

$$[32] \quad \rho(x) = \frac{k - A_0}{x - x_0},$$

come immediatamente si vede, decresce col crescere di x e quindi, perchè sia

$$[33] \quad \frac{k - A_0}{x - x_0} \geq A_1,$$

dovrà essere

$$[34] \quad \frac{k - A_0}{k - x_0} \geq A_1.$$

In conclusione, per la [31] e [34], dovrà essere

$$[35] \quad A_1 = \frac{k - A_0}{k - x_0},$$

evidentemente minore dell'unità.

Da tutto quanto s'è detto segue che si hanno tre casi e cioè

$$\begin{array}{ll} 1^\circ) & x_0 \leq x < \infty & A_1 > 1: \\ 2^\circ) & x_0 \leq x < \infty & A_1 = 1; \\ 3^\circ) & x_0 \leq x \leq k & A_1 = \frac{k - A_0}{k - x_0} < 1. \end{array}$$

Passiamo ora alla determinazione della funzione $F(x)$ corrispondente ai singoli casi ricordando che

$$[9] \quad F(x) = \int_x^x f(\zeta) d\zeta = e^{-\int_{x_0}^x \frac{\varphi'(\zeta)}{\varphi(\zeta) - \zeta} d\zeta}$$

6. Nel primo caso, quando cioè x varia nel campo (x_0, ∞) , ed $A_1 > 1$, abbiamo

$$[36] \quad \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x) - x} = \frac{A_1}{A_1 - 1} \frac{A_1 - 1}{A_0 - A_1 x_0 + (A_1 - 1)x},$$

perciò

$$[37] \quad -\int_{x_0}^x \frac{\varphi'(\zeta)}{\varphi(\zeta) - \zeta} d\zeta = \frac{A_1}{A_1 - 1} \log \frac{A_0 - A_1 x_0 + (A_1 - 1)x_0}{A_0 - A_1 x_0 + (A_1 - 1)x}$$

e quindi

$$[38] \quad F(x) = \left[\frac{a + x_0}{a + x} \right]^\alpha$$

ove, per brevità di scritte, s'è posto

$$a = \frac{A_0 - A_1 x_0}{A_1 - 1};$$

$$\alpha = \frac{A_1}{A_1 - 1}.$$

Passando alla corrispondente equazione della densità della frequenza abbiamo

$$[39] \quad f(x) = - \frac{d}{dx} F(x) = \frac{\alpha}{a + x} \left[\frac{a + x_0}{a + x} \right]^\alpha,$$

ove: x varia nel campo (x_0, ∞) ; α è una costante maggiore dell'unità; ed a è una costante negativa, nulla o positiva tale, in ogni caso, che

$$[40] \quad a + x_0 > 0.$$

La [38], come si vede, è l'equazione proposta dal PARETO, in seconda approssimazione, per rappresentare analiticamente la frequenza dei possessori di un reddito non minore di x . Nel caso particolare in cui $a = 0$, ossia $A_0 = A_1 x_0$, si ha la ben nota equazione di prima approssimazione proposta da PARETO per lo stesso scopo.

Le equazioni paretiane di prima e seconda approssimazione, quindi, godono della proprietà per cui il reddito medio dei possessori di un reddito non minore di x è una funzione linearmente crescente della variabile x , cioè

$$[41] \quad \bar{x}(x) = \frac{\alpha}{\alpha - 1} (x - x_0) + A_0,$$

in cui: x varia nel campo (x_0, ∞) , essendo x_0 il reddito minimo; A_0 è il reddito medio complessivo; ed α è una costante maggiore dell'unità.

In altra sede ho utilizzato questa proprietà escogitando, fra gli altri, un metodo per la determinazione numerica dei parametri che compaiono nell'equazione paretiana di seconda approssimazione, solitamente determinati con metodi più complicati o largamente approssimati (1).

7. Nel secondo caso, quando cioè x varia nel campo (x_0, ∞) ed $A_1 = 1$, abbiamo

$$[42] \quad \varphi(x) = A_0 - x_0 + x,$$

perciò

$$[43] \quad \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x) - x} = \frac{1}{A_0 - x_0},$$

da cui segue

$$[44] \quad - \int_{x_0}^x \frac{dx}{A_0 - x_0} = - \frac{x - x_0}{A_0 - x_0}$$

e quindi

$$F(x) = e^{-\frac{x - x_0}{A_0 - x_0}}$$

(1) R. D'ADDARIO, *La curva dei redditi: sulla determinazione numerica dei parametri della seconda equazione paretiana*, in « Annali dell'Istituto di Statistica della R. Università di Bari », vol. XII.

Passando, infine, alla corrispondente equazione della densità della frequenza, abbiamo

$$[46] \quad f(x) = - \frac{d}{dx} F(x) = \gamma e^{-\gamma(x-x_0)}$$

ove, per brevità di scrittura, s'è posto

$$[47] \quad \gamma = \frac{1}{A_0 - x_0}.$$

Osservando la [46] si nota immediatamente che essa è un caso particolare del tipo III pearsoniano. Infatti, ponendo $p = 1$ nella seguente equazione (tipo III del PEARSON)

$$[48] \quad f(x) = \frac{\gamma^p}{\Gamma(p)} e^{-\gamma(x-x_0)} (x-x_0)^{p-1}$$

(ove: x varia nel campo (x_0, ∞) , γ è una costante positiva, p è una costante positiva e $\Gamma(p)$ sta a rappresentare l'integrale euleriano di seconda specie) si ha proprio la nostra equazione [46].

Il tipo III pearsoniano, quindi, quando $p = 1$, gode della proprietà per cui la media dei valori non minori di x è una funzione linearmente crescente della variabile x è cioè

$$[42] \quad \varphi(x) = A_0 - x_0 + x,$$

in cui x varia nel campo (x_0, ∞) ed A_0 è il valore medio complessivo.

8. Nel terzo caso, infine, quando cioè x varia nel campo (x_0, k) , essendo k un numero finito, abbiamo

$$[49] \quad \varphi(x) = A_0 + \frac{k - A_0}{k - x_0} (x - x_0),$$

ovvero, ponendo per brevità di scrittura,

$$[50] \quad A_1 = \frac{k - A_0}{k - x_0} < 1,$$

abbiamo ancora

$$[51] \quad \varphi(x) = A_0 + A_1(x - x_0).$$

Ora

$$[52] \quad \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x) - x} = \frac{A_1}{A_0 - A_1 x_0 - (1 - A_1)x},$$

ovvero, poichè per la [50]

$$[53] \quad k = \frac{A_0 - A_1 x_0}{1 - A_1}$$

abbiamo ancora

$$[54] \quad \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x) - x} = \frac{A_1}{1 - A_1} \frac{1}{k - x}.$$

perciò

$$[55] \quad - \int_{x_0}^x \frac{\varphi'(\zeta)}{\varphi(\zeta) - \zeta} d\zeta = \frac{A_1}{1 - A_1} \left[\log(k - x) - \log(k - x_0) \right]$$

e quindi

$$[56] \quad F(x) = \left[\frac{k - x}{k - x_0} \right]^\delta$$

ove, per brevità di scrittura, s'è posto

$$[57] \quad \delta = \frac{A_1}{1 - A_1}.$$

Passando, infine, alla corrispondente equazione della densità della frequenza abbiamo

$$[58] \quad f(x) = - \frac{d}{dx} F(x) = \frac{\delta}{k - x_0} \left[\frac{k - x}{k - x_0} \right]^{\delta - 1}$$

ove: x varia nel campo (x_0, k) e δ è una costante essenzialmente positiva. Propriamente, per la [50] e la [57],

$$[59] \quad \delta = \frac{k - A_0}{A_0 - x_0},$$

in cui x_0 e k stanno a rappresentare gli estremi inferiore e rispettivamente superiore del campo di variabilità di x ed A_0 è il valore medio complessivo.

9. Dunque, se

$$[21] \quad \varphi(x) = A_0 + A_1(x - x_0),$$

cioè, se la media dei valori non minori di x è una funzione linearmente crescente della variabile x , la $F(x)$ corrispondente, cioè l'equazione della curva di ripartizione totale, può assumere forme diverse in dipendenza dell'ampiezza del campo in cui varia la x e del valore che, di conseguenza, può assumere il parametro A_1 .

Se x varia nel campo (x_0, ∞) , abbiamo dimostrato che A_1 deve assumere un valore uguale o maggiore dell'unità; mentre se x varia nel campo (x_0, k) , essendo k un numero finito, il parametro A_1 deve assumere un valore minore dell'unità. Sono questi i soli casi possibili, poichè solo in questi casi la [21] soddisfa tutte le condizioni cui dovrà soddisfare ogni equazione esprime la media dei valori non minori di x .

Studiamo ora, nei diversi casi possibili, la funzione $f(x)$, l'equazione cioè della curva di ripartizione semplice.

Dunque:

1°) se x varia nel campo (x_0, ∞) ed $A_1 > 1$ è

$$[39] \quad f(x) = \frac{a}{a+x} \left[\frac{a+x_0}{a+x} \right]^\alpha,$$

ove: $\alpha > 1$ ed a tale che $a + x_0 > 0$. La $f(x)$, cioè, assume una forma iperbolica. Essa, graficamente, sta a rappresentare una curva decrescente e volgente la concavità verso l'alto. Infatti

$$f'(x) = -\frac{\alpha+1}{a+x} f(x) < 0;$$

$$f''(x) = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{(a+x)^2} f(x) > 0.$$

La $f(x)$, propriamente, dal valore $\frac{\alpha}{a+x_0}$, per $x = x_0$, tende asintoticamente, sempre decrescendo, a zero, per x tendente all'infinito.

Abbiamo detto che, in ogni caso, $a + x_0 > 0$, quindi se $a = 0$, come nell'equazione paretiana di prima approssimazione, dovrà essere $x_0 > 0$, mentre se $a > 0$ può essere, ovviamente, $x_0 = 0$.

La funzione [39] è già stata ampiamente studiata, specialmente in occasione dello studio della curva dei redditi, e perciò riteniamo superfluo insistere sulle sue proprietà e caratteristiche. Per la determinazione numerica dei parametri che in essa compaiono ci permettiamo di rimandare alla citata nostra memoria sull'argomento.

2°) se x varia nel campo (x_0, ∞) ed $A_1 = 1$ è

$$[46] \quad f(x) = \gamma e^{-\gamma(x-x_0)},$$

ove γ è una costante essenzialmente positiva. In questo caso quindi, la $f(x)$ assume una forma esponenziale. Essa, graficamente, sta a rappresentare una curva decrescente e volgente la concavità verso l'alto. Infatti

$$f'(x) = -\gamma^2 e^{-\gamma(x-x_0)} < 0;$$

$$f''(x) = \gamma^3 e^{-\gamma(x-x_0)} > 0.$$

La $f(x)$, propriamente, dal valore γ , per $x = x_0$, tende asintoticamente, sempre decrescendo, a zero, per x tendente all'infinito.

3°) se x varia nel campo (x_0, k) , essendo k un numero finito, ed $A_1 < 1$ è

$$[58] \quad f(x) = \frac{\delta}{k-x_0} \left[\frac{k-x}{k-x_0} \right]^{\delta-1},$$

in cui δ è una costante essenzialmente positiva.

Osservando la [58], si vede che $f(x)$ assume una forma iperbolica se $\delta < 1$, mentre se $\delta > 1$ essa assume una forma parabolica. Ma studiamo più da vicino questi due casi.

Passando alla derivata prima ed alla derivata seconda abbiamo

$$f'(x) = -\frac{\delta(\delta-1)}{(k-x_0)^2} \left[\frac{k-x}{k-x_0} \right]^{\delta-2};$$

$$f''(x) = \frac{\delta(\delta-1)(\delta-2)}{(k-x_0)^3} \left[\frac{k-x}{k-x_0} \right]^{\delta-3},$$

cioè:

a) se $0 < \delta < 1$, sarà, in tutto il campo (x_0, k) , $f'(x) > 0$ ed $f''(x) > 0$ e quindi $f(x)$ sta a rappresentare

una curva crescente e volgente la concavità verso l'alto. Essa, propriamente, dal valore $\frac{\delta}{k - x_0}$, per $x = x_0$, tende, sempre crescendo, all'infinito, per x tendente a k . La $f(x)$, perciò, forma un asintoto con la parallela all'asse delle ordinate condotta per il punto di ascissa k ;

b) se $\delta = 1$, abbiamo il caso banale $f(x) = \frac{\delta}{k - x_0}$, abbiamo, cioè, una retta parallela all'asse delle ascisse;

c) se $1 < \delta < 2$, sarà, in tutto il campo (x_0, k) , $f'(x) < 0$ ed $f''(x) < 0$ e quindi $f(x)$ sta a rappresentare una curva decrescente e volgente la concavità verso il basso. Essa, propriamente, dal valore $\frac{\delta}{k - x_0}$, per $x = x_0$, passa, sempre decrescendo, al valore zero, per $x = k$;

d) se $\delta = 2$, abbiamo una retta discendente di coefficiente angolare uguale a $-\frac{\delta}{(k - x)^2}$; la $f(x)$ passa quindi, sempre decrescendo, dal valore $\frac{\delta}{k - x_0}$, per $x = x_0$, al valore zero, per $x = k$.

e) se $\delta > 2$, sarà, in tutto il campo (x_0, k) , $f'(x) < 0$ ed $f''(x) > 0$ e quindi $f(x)$ sta a rappresentare una curva decrescente e volgente la concavità verso l'alto. Essa, propriamente, dal valore $\frac{\delta}{k - x_0}$, per $x = x_0$, passa, sempre decrescendo, al valore zero per $x = k$.

Condotta a termine la nostra analisi, è bene sottolineare come, dalla semplice ipotesi

$$[21] \quad \varphi(x) = A_0 + A_1(x - x_0),$$

noi abbiamo dedotto complessivamente sette forme diverse per la curva rappresentata dalla corrispondente $f(x)$ (equazione di ripartizione semplice).

Quelle forme dipendono, come si è visto, dall'ampiezza del campo in cui varia x e dal valore che, di conseguenza, può assumere il parametro A_1 .

Ecco in sintesi i sette casi possibili:

Campo di variabilità	Valore del parametro A_1	Forma della curva di ripartizione semplice
$x_0 \leq x < \infty$	$A_1 > 1$	decrescente (tipo iperbolico) ed asintotica
$x_0 \leq x < \infty$	$A_1 = 1$	decrescente (tipo esponenziale) ed asintotica
$x_0 \leq x < k$	$0 < A_1 < \frac{1}{2}$	crescente (tipo iperbolico) ed asintotica
$x_0 \leq x \leq k$	$A_1 = \frac{1}{2}$	retta parallela all'asse delle x
$x_0 \leq x \leq k$	$\frac{1}{2} < A_1 < \frac{2}{3}$	decrescente con la concavità verso il basso (tipo parabolico)
$x_0 \leq x \leq k$	$A_1 = \frac{2}{3}$	retta discendente
$x_0 \leq x \leq k$	$\frac{2}{3} < A_1 < 1$	decrescente con la concavità verso l'alto (tipo parabolico).

In ogni caso, come si vede, la curva di ripartizione semplice, corrispondente all'ipotesi che la media dei valori non minori di x sia una funzione linearmente crescente della variabile x , è zeromodale. E propriamente, tranne un caso in cui è crescente ed un caso in cui è costante, negli altri cinque casi è sempre decrescente.

10. Consideriamo ora, sempre a titolo di esempio, i primi tre termini dello sviluppo [20], cioè

$$[60] \quad \varphi(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2,$$

in cui x varia nel campo (x_0, ∞) ed i parametri A_0 , A_1 ed A_2 possono assumere solamente valori positivi. Infatti, essendo

$x_0 \geq 0$ sarà, di conseguenza, $A_0 > 0$. Inoltre, derivando, abbiamo

$$[61] \quad \varphi'(x) = A_1 + 2 A_2 (x - x_0),$$

che, per le proprietà generali della funzione $\varphi(x)$, dovrà essere maggiore di zero in tutto il campo (x_0, ∞) . Ma

$$[62] \quad \varphi'(x_0) = A_1$$

quindi $A_1 > 0$.

La [61], infine, si annulla nel punto

$$[63] \quad v = x_0 - \frac{A_1}{2 A_2},$$

che dovrà trovarsi a sinistra del punto x_0 , in quanto $\varphi'(x) > 0$ in tutto il campo (x_0, ∞) . Ora, perchè sia $v < x_0$, essendo $A_1 > 0$, dovrà essere $A_2 > 0$.

In definitiva, quindi, abbiamo

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 \geq 0 \\ A_0 > 0 \\ A_1 > 0 \\ A_2 > 0 \end{array} \right.$$

In particolare, se $A_1 = 0$, cioè se

$$[54] \quad \varphi(x) = A_0 + A_2 (x - x_0)^2,$$

si vede immediatamente che

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 \geq 0 \\ A_0 > 0 \\ A_2 > 0 \end{array} \right.$$

ed inoltre

$$v = x_0.$$

Da quanto precede si deduce, poi, che la derivata seconda della nostra funzione, cioè la [60], è maggiore di zero in quanto

$$[65] \quad \varphi''(x) = 2 A_2.$$

La [60], in conclusione, nell'intervallo (x_0, ∞) ed alle condizioni stabilite circa i valori dei parametri, sta a rappresentare graficamente una curva crescente e volgente la concavità verso l'alto.

Stabiliamo, infine, le condizioni perchè in ogni punto dell'intervallo (x_0, ∞) sia sempre

$$[66] \quad \delta(x) = \varphi(x) - x > 0.$$

Nel nostro caso è

$$[67] \quad \delta(x) = A_0 - x_0 + (A_1 - 1)(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2,$$

per cui, derivando, abbiamo

$$[68] \quad \delta'(x) = A_1 - 1 + 2 A_2(x - x_0);$$

$$[69] \quad \delta''(x) = 2 A_2 > 0,$$

cioè la nostra funzione $\delta(x)$ ha un minimo nel punto

$$[70] \quad v = x_0 + \frac{1 - A_1}{2 A_2}.$$

Ora, se $A_1 > 1$ è $v < x_0$ e quindi nell'intervallo (x_0, ∞) la nostra funzione sarà sempre crescente.

Ma

$$\delta(x_0) = A_0 - x_0 > 0$$

onde si conclude che quando $A_1 > 1$ la funzione $\delta(x)$ è sempre positiva in ogni punto del campo (x_0, ∞) .

Analogamente, se $A_1 = 1$ è $v = x_0$ e quindi nell'intervallo (x_0, ∞) la nostra funzione sarà sempre crescente, assumendo il valore minimo nel punto x_0 . Da

$$\delta(x_0) = A_0 - x_0 > 0$$

segue che anche quando $A_1 = 1$ la funzione $\delta(x)$ è sempre positiva in ogni punto del campo (x_0, ∞) .

Infine, se $A_1 < 1$ è $v > x_0$ e quindi nell'intervallo (x_0, ∞) la nostra funzione ha un minimo, che vale

$$[71] \quad \delta(v) = A_0 - x_0 - \frac{(1 - A_1)^2}{4 A_2}.$$

Siccome la condizione $\delta(x) > 0$ dovrà essere soddisfatta per tutti i valori di x compresi nell'intervallo (x_0, ∞) , dovrà essere anche

$$\delta(v) > 0.$$

per il che basta che sia

$$[72] \quad 4 \frac{A_0 - x_0}{(1 - A_1)^2} A_2 > 1.$$

11. Facciamo ora un breve cenno sulla determinazione della funzione $F(x)$ corrispondente alla [60], cioè:

$$[60] \quad \varphi(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2,$$

ricordando che

$$[14] \quad F(x) = \frac{\varphi(x_0) - x_0}{\varphi(x) - x} e^{-\int_{x_0}^x \frac{1}{\varphi(z) - z} dz}$$

Nel nostro caso abbiamo

$$[73] \quad F(x) = \frac{A_0 - x_0}{A_0 - x_0 + (A_1 - 1)(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2} \Psi(x),$$

ove

$$\Psi(x) = e^{-\int_{x_0}^x \frac{dx}{A_0 - x_0 + (A_1 - 1)(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2}}$$

cioè tutto il problema si riduce al calcolo dell'integrale che sta ad esponente del secondo fattore. Per questo calcolo bisogna distinguere tre casi fondamentali e cioè

$$\left\{ \begin{array}{l} 1^\circ \text{ caso} : \frac{(A_1 - 1)^2}{4(A_0 - x_0)A_2} > 1; \\ 2^\circ \text{ caso} : \frac{(A_1 - 1)^2}{4(A_0 - x_0)A_2} = 1; \\ 3^\circ \text{ caso} : \frac{(A_1 - 1)^2}{4(A_0 - x_0)A_2} < 1, \end{array} \right.$$

ai quali corrispondono, di conseguenza, tre tipi fondamentali per la funzione $F(x)$.

Alla considerazione di questi tre casi fondamentali bisogna poi aggiungere i casi particolari ed i casi limite, in quanto ad ognuno d'essi corrisponde un tipo per la funzione $F(x)$.

La forma di $F(x)$, insomma, dipende dai valori particolari che possono assumere i parametri A_0 , A_1 ed A_2 . Praticamente, come sopra si è visto, la $F(x)$ assume forme diverse a seconda del valore che assume il rapporto

$$[74] \quad R = \frac{(A_1 - 1)^2}{4 (A_0 - x_0) A_2},$$

che, come PEARSON, denomineremo *criterio* e ciò per l'analogia formale tra il problema pearsoniano e questo nostro problema.

Il calcolo dell'integrale

$$[75] \quad \int_{x_0}^x \frac{dx}{A_0 - x_0 + (A_1 - 1)(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2}$$

non presenta alcuna difficoltà, ma è bene, per l'economia di questa nostra succinta esposizione, rimandare ad altra occasione la trattazione completa del problema appena appena accennato in questo numero.

Prima di passare oltre, però, ci preme rendere senz'altro noto che l'equazione della curva della prolificità matrimoniale sembra che goda proprio della proprietà espressa dalla [60] e cioè

$$\varphi(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2,$$

ove: $\varphi(x)$ è il numero medio dei figli corrispondente ai matrimoni con non meno di x figli; A_0 è il numero medio dei figli corrispondente a tutti i matrimoni considerati; x varia nel campo (x_0, ∞) , essendo x_0 l'origine convenzionale della variabile x .

12. La scelta dell'equazione rappresentatrice di una distribuzione statistica è un problema essenzialmente d'intuito e perciò non consente regole rigide e generali.

La metodologia statistica assolve il suo compito apprestando strumenti atti a facilitare quella scelta e tali da indirizzare ed aiutare a risolvere un problema a volte difficilissimo.

Il *metodo della media dei valori eccedenti*, che ho qui delineato, è precisamente un metodo generale che può aiutare non poco a risolvere il problema della ricerca dell'equazione interpolatrice. Esso, infatti, ad una scelta più difficile e più complicata, sostituisce una scelta generalmente meno difficile e meno complicata, in quanto è a prevedere, date le sue proprietà, che la determinazione statistica diretta dell'equazione esprime la media dei valori non minori di x — attraverso la quale si passa all'equazione della densità della frequenza — sia più agevole della determinazione statistica diretta dell'equazione rappresentatrice della distribuzione assegnata.

Un pregio del metodo esposto, comunque, sta nella circostanza che per la ricerca della funzione interpolatrice si utilizzano *sistematicamente e contemporaneamente* i valori osservati di x , i corrispondenti valori osservati di $N(x)$ (numero dei valori non minori di x) ed i corrispondenti valori osservati di $C(x)$ (somma dei valori non minori di x).

E' appena il caso di notare poi che in modo analogo, *mutatis mutandis*, potrebbe essere impostato un metodo simile a quello proposto, partendo, anzichè dalla media dei valori non minori di x , dalla media dei valori non maggiori di x , cioè

$$[76] \quad \Psi(x) = \frac{\int_{x_0}^x \tau f(\tau) d\tau}{\int_{x_0}^x f(\tau) d\tau}$$

ove, come prima, $f(x)$ è l'equazione della densità della frequenza ed x varia nel campo (x_0, ∞) , ovvero (x_0, k) , essendo $x_0 \geq 0$ e k un numero finito.

E' facile vedere che $\Psi(x)$ è una funzione crescente di x . Essa, propriamente, da x_0 , per x tendente ad x_0 , tende, sempre crescendo, ad A (valore medio complessivo), per x tendente all'estremo destro del campo di variabilità.

Siffatto metodo presenta, grosso modo, gli stessi pregi del *metodo della media dei valori eccedenti* e dovrebbe denominarsi, per simmetria con quello proposto e per la sua stessa origine, *metodo della media dei valori non eccedenti*.

Il *metodo della media dei valori eccedenti*, il *metodo della trasformazione della variabile* ed altri metodi simili aiutano, ripetiamo, a scegliere la funzione rappresentatrice di una distribuzione statistica, ma il successo finale rimane e rimarrà sempre subordinato all'intuito personale dello studioso.

Prima di chiudere vogliamo chiarire, infine, che in questa rapidissima memoria ci siamo limitati a dare le linee fondamentali del metodo ed abbiamo quindi, per una migliore economia del lavoro e per una più snella esposizione, trascurato volutamente, o appena abbozzato, molti problemi particolari e collaterali il cui sviluppo formerà oggetto di una memoria di più ampio respiro.

SUL CALCOLO APPROSSIMATO DELLE ANNUALITÀ VITALIZIE

GUIDO SANTACROCE

1. Non di rado occorre in pratica calcolare con speditezza e sufficiente approssimazione il valore medio di un'annualità vitalizia che corrisponda ad un saggio d'interesse non considerato nelle usuali tavole di commutazione. La necessità di risolvere siffatto problema può presentarsi, ad esempio, allorchè si debba valutare l'influenza di una certa variazione del saggio d'interesse sull'ammontare delle riserve matematiche; o, più comunemente, quando siano richiesti o debbano sottoporsi a controllo tassi di speciali tariffe, la cui base finanziaria sia diversa da quella delle tariffe ordinarie; od ancora quando, nell'ipotesi di MAKEHAM, si voglia calcolare il valore medio di un'annualità vitalizia su più teste, riportandosi con opportuna modifica del saggio d'interesse al calcolo di un'annualità vitalizia su singola testa.

I procedimenti, che mi propongo esporre nella presente nota, allo scopo di determinare la variazione che subiscono le annualità vitalizie per effetto di un cambiamento del tasso d'interesse, si sono palesati di notevole efficienza pratica, non solo per quanto concerne il grado di approssimazione, ma bensì per alcune interessanti applicazioni, che brevemente avrò occasione di illustrare nel corso stesso di questo studio.

2. Sia

$$a_x = \sum_{t \geq 1} {}_t p_x e^{-\delta t}$$

con $\delta = \log_e (1 + i)$, il valore capitale di una rendita vitalizia unitaria, immediata, posticipata al saggio i (positivo) e

$$e_x = \sum_{t \geq 1} {}_t p_x$$

la vita media.

Posto

$$[1] \quad \frac{a_x}{e_x} = \frac{\sum_{t \geq 1} {}_t p_x e^{-\delta t}}{\sum_{t \geq 1} {}_t p_x} = e^{-\delta \lambda}$$

con che λ rappresenta una scadenza media dei termini della rendita vitalizia considerata, si ha

$$[2] \quad \lambda = - \frac{1}{\delta} \log_e \frac{a_x}{e_x} = \frac{\log e_x - \log a_x}{\log (1 + i)}$$

Fissata l'età x , come varia λ al variare del saggio d'interesse?

E' facile dimostrare che λ è funzione decrescente di i ; ma, prima di passare alla dimostrazione di questa proprietà, conviene osservare che sussiste la limitazione

$$[3] \quad \lambda > \frac{1}{a_x} (Ia)_x$$

dove, secondo la notazione consueta, è

$$(Ia)_x = \sum_{t \geq 1} {}_t p_x t e^{-\delta t}$$

Infatti, nella nota disequaglianza

$$\log \frac{\sum \alpha_t \beta_t}{\sum \alpha_t} < \frac{\sum \alpha_t \beta_t \log \beta_t}{\sum \alpha_t \beta_t}$$

certamente valida quando le α_t e le β_t sono quantità positive (queste ultime non tutte uguali), si assuma

$$\alpha_t = {}_t p_x \quad , \quad \beta_t = e^{-\delta t}$$

sicchè essa si trasforma come segue

$$\log_e \frac{\sum_{t \geq 1} {}_t p_x e^{-\delta t}}{\sum_{t \geq 1} {}_t p_x} < -\delta \frac{\sum_{t \geq 1} {}_t p_x t e^{-\delta t}}{\sum_{t \geq 1} {}_t p_x e^{-\delta t}}$$

da cui, in forza della formola [1], risulta

$$-\delta \lambda < -\delta \frac{(Ia)_x}{a_x} ,$$

cioè la [3].

Resta da provare che λ decresce al crescere di i , cioè che

$$\frac{d \lambda}{d i} < 0$$

Da

$$-\delta \lambda = \log_e \frac{a_x}{e_x}$$

derivando rispetto a δ , si ottiene

$$-\delta \frac{d \lambda}{d \delta} - \lambda = \frac{1}{a_x} \frac{d a_x}{d \delta}$$

che, essendo

$$[4] \quad \frac{d a_x}{d \delta} = - (Ia)_x,$$

diventa

$$\frac{1}{a_x} (Ia)_x = \delta \frac{d \lambda}{d \delta} + \lambda,$$

da cui, osservando la [3], si inferisce che

$$\frac{d \lambda}{d \delta} < 0$$

e quindi

$$\frac{d \lambda}{d i} < 0,$$

c. d. d.

3. Ciò premesso, quando si disponga di tavole attuariali a due saggi d'interesse, ecco come si può effettuare una conveniente valutazione approssimata del vitalizio ad un altro tasso.

Siano, dunque, noti i valori del vitalizio a_x corrispondenti a due saggi d'interesse i' e i'' , e vogliasi calcolare il valore capitale dello stesso vitalizio ad un altro tasso i .

Dalla formula [2] ricaviamo i valori λ' e λ'' di λ relativi ai saggi i' e i'' . In base a tali valori λ' e λ'' , si ottiene un valore approssimato dell'esponente λ che corrisponde al tasso i mediante interpolazione per parti proporzionali, assumendo

$$\lambda = \lambda' + \frac{i - i'}{i'' - i'} (\lambda'' - \lambda')$$

In tal guisa determinato λ , dalla [1] si trae il valore di a_x .

Nei limiti delle ordinarie applicazioni, il procedimento esposto fornisce risultati soddisfacentissimi, come risulta dalle verifiche riportate negli esempi del numero seguente.

4. Secondo le tavole del BAGNI ⁽¹⁾ partendo da valori noti del vitalizio ai tassi del 3 % e del 4 % ed avvalendosi del metodo esposto dianzi, si ottengono i seguenti valori del vitalizio al 3,50 %.

TAV. I.

Età x	Valori del vitalizio		Errori relativi ‰
	approssimati	esatti	
15	21,363	21,373	4,7
20	20,539	20,549	4,9
25	19,796	19,803	3,5
30	18,882	18,888	3,2
35	17,762	17,767	2,8
40	16,464	16,468	2,4
45	15,021	15,023	1,3
50	13,405	13,407	1,5
55	11,646	11,647	0,9
60	9,755	9,757	2,1
65	7,921	7,922	1,3
70	6,123	6,123	—
75	4,581	4,582	2,2
80	3,296	3,296	—

⁽¹⁾ T. BAGNI: *Tavole numeriche per il calcolo delle operazioni vitalizie basate sulla tavola di sopravvivenza della popolazione italiana 1901*. Ed. Ministero Agricoltura, Industria e Commercio, 1908.

In base ai valori del vitalizio ai tassi suindicati e applicando il medesimo procedimento al fine di ottenere il vitalizio al 4,50 %, si ricavano i valori approssimati contenuti nella seguente tabella:

TAV. II.

Età x	Valori del vitalizio		Errori relativi ‰
	approssimati	esatti	
15	18,092	18,064	15
20	17,519	17,499	11
25	17,019	17,005	8,2
30	16,380	16,370	6,1
35	15,559	15,552	4,5
40	14,575	14,571	2,7
45	13,448	13,443	3,7
50	12,138	12,139	0,8
55	10,678	10,675	2,8
60	9,050	9,051	1,1
65	7,436	7,435	1,3
70	5,811	5,811	—
75	4,389	4,390	2,3
80	3,183	3,184	3,1

Il metodo è ancora applicabile alle annualità temporanee, nel qual caso basta sostituire alla [1] la formola

$$[1'] \quad \frac{a_{x\overline{n}|}}{e_{x\overline{n}|}} = e^{-\delta n}$$

ove $e_{x\overline{n}|}$ denota la vita media temporanea. Così, ad esempio, partendo dai valori noti delle annualità temporanee (per diverse durate) ai tassi del 3 % e del 5 %, nella tavola III sono

riportati i valori approssimati al tasso del 4 % e posti a confronto con i rispettivi valori esatti.

Si riscontra in tutti gli esempi indicati che gli scarti tra i valori approssimati e quelli esatti sono di così poco momento che, sotto ogni riguardo, si possono considerare affatto irrilevanti.

TAV. III.

Età	Durata anni 15			Durata anni 20			Durata anni 25		
	Valore della annualità		errore relativo ‰	Valore della annualità		errore relativo ‰	Valore della annualità		errore relativo ‰
	appross.	esatto		appross.	esatto		appross.	esatto	
15	10,691	10,693	1,9	12,906	12,908	1,5	14,661	14,665	2,7
20	10,589	10,591	1,9	12,778	12,778	—	14,495	14,499	2,7
25	10,583	10,585	1,9	12,749	12,751	1,6	14,437	14,440	2,1
30	10,551	10,553	1,9	12,675	12,678	2,4	14,306	14,309	2,1
35	10,460	10,462	1,9	12,512	12,515	2,4	14,052	14,055	2,1
40	10,308	10,310	1,9	12,254	12,256	1,6	13,644	13,647	2,2
45	10,097	10,099	2,0	11,870	11,872	1,7	13,045	13,048	2,3
50	9,747	9,749	2,1	11,263	11,265	1,8	12,146	12,149	2,5
55	9,196	9,197	1,1	10,354	10,358	3,9	10,904	10,907	2,7
60	8,328	8,329	1,2	9,071	9,072	1,1	9,326	9,328	2,1
65	7,210	7,211	1,4	7,578	7,579	1,3	7,659	7,660	1,3
70	5,817	5,818	1,7	5,945	5,945	—			
75	4,449	4,450	2,2						

5. Ammettiamo ora che le tavole monetarie disponibili si riferiscano a un solo tasso i . In tal caso la valutazione del vitalizio a un saggio d'interesse $i' = i$ si può convenientemente effettuare col metodo che segue.

Si osservi, anzitutto, che pensando come funzione di

$\delta = \log_e(1+i)$ il valore capitale della rendita vitalizia unitaria posticipata

$$a_x = \sum_{t \geq 1} {}_t p_x e^{-\delta t}$$

e ponendo

$$[5] \quad I_r = \frac{\sum_{t \geq 1} {}_t r p_x e^{-\delta t}}{\sum_{t \geq 1} {}_t p_x e^{-\delta t}} \quad (r = 1, 2, 3, \dots)$$

le successive derivate rispetto a δ di

$$f_\delta = \log_e a_x,$$

sono

$$\begin{aligned}
f'_\delta &= -I_1 \\
f''_\delta &= I_2 - I_1^2 \\
f'''_\delta &= -I_3 + 3 I_1 I_2 - 2 I_1^3 \\
&\dots \\
&\dots
\end{aligned}$$

Ne segue che, denotando con a'_x il valore del vitalizio corrispondente al tasso i' (e quindi a una forza d'interesse $\delta' = \log_e(1+i')$), lo sviluppo in serie di Taylor di $\log_e a'_x$ si può esprimere sotto la forma

$$[6] \quad \log_e a'_x = \log_e a_x - (\delta' - \delta) I_1 + \frac{1}{2} (\delta' - \delta)^2 (I_2 - I_1^2) \dots$$

Da questo sviluppo, trascurando i termini con potenze di ordine superiore al secondo, si trae immediatamente

$$[7] \quad a'_x = a_x e^{-(\delta' - \delta) I_1 + \frac{1}{2} (\delta' - \delta)^2 (I_2 - I_1^2)}$$

che è la formola che si voleva stabilire per il calcolo approssimato di a'_x .

In particolare, per $i = 0$, la [7] diventa

$$[8] \quad a'_x = e_x e^{-\delta' \bar{I}_1 + \frac{1}{2} \delta'^2 (\bar{I}_1 - \bar{I}_1^2)}$$

dove \bar{I}_1 e \bar{I}_2 designano i rispettivi valori di I_1 e I_2 per $i = 0$.

6. La determinazione numerica delle quantità I_1 e I_2 , che figurano nella [7], si esegue agevolmente, notando che coll'introdurre i noti simboli di commutazione

$$N_x = D_{x+1} + D_{x+2} + \dots$$

$$S_x = N_x + N_{x+1} + \dots = D_{x+1} + 2 D_{x+2} + 3 D_{x+3} + \dots$$

e col porre

$$U_x = S_x + S_{x+1} + \dots$$

valgono le relazioni

$$[9] \quad I_1 = \frac{S_x}{N_x}$$

$$I_2 = \frac{2 U_x - S_x}{N_x}$$

E' ovvio che la formola [7] si applica anche alle rendite temporanee; senonchè giova avvertire che, per esprimere I_1 e I_2 in funzione dei simboli di commutazione, si hanno formole meno semplici delle [9].

7. E' di qualche interesse rilevare come limitando lo sviluppo [6] al secondo termine, anzichè al terzo, si desuma una formola di prima approssimazione che, semplicemente trasfor-

mata, conduce a un risultato ottenuto per altra via da B. MEIDELL (2)

Infatti, nel caso considerato, si ha

$$[10] \quad a'_x = a_x e^{-(\delta' - \delta) \bar{t}_1}$$

da cui, osservando che per $h = i' - i$ si può scrivere

$$e^{\delta' - \delta} = 1 + h v$$

e tenendo presente la prima delle [9], segue

$$[11] \quad a'_x = a_x (1 + h v)^{-\frac{S_x}{N_x}}$$

che è appunto l'accennata formula di MEIDELL (3).

(2) B. MEIDELL: *Note sur quelques inégalités et formules d'approximation*, Scandinavisk Aktuarietidskrift, 1918.

(3) Dalla stessa formola [10] si può derivare, in particolare, una seconda formola di MEIDELL, che è tuttavia di scarsa importanza pratica a causa del troppo limitato grado di approssimazione riscontrato nelle applicazioni.

Assumendo $i = 0$, la [10] diventa:

$$[a] \quad a'_x = e_x \cdot e^{-\delta' \bar{t}_1}$$

dove

$$\bar{t}_1 = \frac{(Ie)_x}{e_x}$$

Per un altro tasso i , è lecito scrivere analogamente

$$a_x = e_x \cdot e^{-\delta \bar{t}_1}$$

da cui

$$e^{-\bar{t}_1} = \left(\frac{a_x}{e_x} \right)^{\frac{1}{\delta}}$$

Mediante sostituzione nella [a], risulta la formola cercata

$$a'_x = e_x \left(\frac{a_x}{e_x} \right)^{\frac{\delta'}{\delta}}$$

8. Quanto notevole sia il grado di approssimazione che la [7] consente di raggiungere appare chiaro dalle cifre registrate nel prospetto seguente (Tav. IV). In base alle consuete tavole del BAGNI e con riferimento ai valori del vitalizio, al tasso del 3,50 %, sono stati calcolati secondo la formola [7] (ed anche secondo la [10]) i corrispondenti valori del vitalizio ai tassi del 3 % e del 4 %.

TAV. IV.

Età	$i = 0,03$ valori del vitalizio					$i = 0,04$ valori del vitalizio				
	1 ^a appross. formola (10)	errore relativo ‰	valore esatto	2 ^a appross. formola (7)	errore relativo ‰	1 ^a appross. formola (10)	errore relativo ‰	valore esatto	2 ^a appross. formola (7)	errore relativo ‰
	15	23,372	-25,6	23,432	23,430	-0,85	19,553	-23,4	19,600	19,601
20	22,373	-22,3	22,423	22,422	-0,45	18,881	-21,1	18,921	18,922	+0,53
25	21,459	-19,5	21,501	21,500	-0,47	18,282	-18,6	18,316	18,316	—
30	20,363	-16,2	20,396	20,395	-0,49	17,527	-15,4	17,554	17,555	+0,57
35	19,049	-13,1	19,074	19,074	—	16,577	-13,3	16,599	16,600	+0,60
40	17,553	-11,4	17,573	17,573	—	15,455	-11	15,472	15,472	—
45	15,915	-9,4	15,930	15,930	—	14,185	-9,2	14,198	14,197	-0,70
50	14,114	-7,1	14,124	14,124	—	12,739	-6,3	12,747	12,748	+0,78
55	12,182	-5,7	12,189	12,189	—	11,137	-6,3	11,144	11,143	-0,90
60	10,141	-3,9	10,145	10,145	—	9,389	-4,3	9,393	9,393	—
65	8,183	-2,4	8,185	8,186	+1,2	7,670	-2,6	7,672	7,672	—
70	6,289	-3,2	6,291	6,290	-1,6	5,962	-3,4	5,964	5,963	-1,7
75	4,683	—	4,683	4,683	—	4,484	—	4,484	4,485	+2,2
80	3,355	—	3,355	3,355	—	3,239	—	3,239	3,239	—

9. Fermiamoci, da ultimo, a considerare un'applicazione della formola [8] in riferimento alla ricerca del tasso d'interesse di una rendita certa, di cui siano noti il valore attuale e la durata.

Se a designa il valore attuale di una rendita certa, unitaria, posticipata, di durata n , la formola [8] assume allora l'aspetto seguente

$$a = n e^{-\delta \bar{t}_1 + \frac{\delta^2}{2} (\bar{t}_1 - \bar{t}_1^2)}$$

in cui

$$\bar{I}_1 = \frac{\sum_{t=1}^n t}{n} = \frac{n+1}{2}$$

$$\bar{I}_2 = \frac{\sum_{t=1}^n t^2}{n} = \frac{(n+1)(2n+1)}{2 \cdot 3}$$

Ne consegue

$$\log_e \frac{a}{n} = -\frac{n+1}{2} \delta + \left\{ \frac{(n+1)(2n+1)}{2 \cdot 3} - \left(\frac{n+1}{2} \right)^2 \right\} \frac{\delta^2}{2},$$

che, ponendo

$$h = \frac{2}{n+1} \log_e \frac{n}{a}$$

conduce all'equazione in $\delta = \log_e (1+i)$

$$h = \delta - \frac{n-1}{12} \delta^2,$$

che è opportuno risolvere per successive approssimazioni.

Pertanto, si ponga la suddetta equazione sotto la forma

$$[12] \quad \delta = \frac{12 h}{12 - (n-1) \delta}$$

Movendo dal valore di δ corrispondente ad $i = 0$, cioè assumendo

$$\delta_0 = 0$$

e sostituendo codesto valore al posto di δ nel secondo membro della [12], si ottiene il nuovo valore approssimato

$$\delta_1 = h$$

Parimenti, sostituendo $\delta_1 = h$ in luogo di δ nel secondo membro della medesima formola, si trova

$$\delta_2 = \frac{12 h}{12 - (n - 1) h}$$

Ed operando analogamente con δ_2 si ha

$$\begin{aligned} \delta_3 &= \frac{12 h}{12 - \frac{12 (n - 1) h}{12 - (n - 1) h}} \\ &= h \frac{12 - (n - 1) h}{12 - 2 (n - 1) h} \end{aligned}$$

In definitiva, per il calcolo del tasso cercato i si ricava la formola

$$[13] \quad \delta = \log_e (1 + i) = h \frac{12 - (n - 1) h}{12 - 2 (n - 1) h}$$

in cui è

$$h = \frac{2}{n + 1} \log_e \frac{n}{a}$$

Siamo così pervenuti ad una espressione approssimata di $\delta = \log_e (1 + i)$ che, salvo il diverso significato di h , coincide

con quella fornita dalla nota formola di BAILY per la determinazione del tasso i .

Agli effetti dei calcoli, conviene introdurre i logaritmi volgari al posto di quelli neperiani; sicchè la formola [13] si trasforma come segue (⁴)

$$[13'] \quad \log(1+i) = k \frac{5,2115338 - (n-1)k}{5,2115338 - 2(n-1)k}$$

con

$$k = \frac{2}{n+1} \log \frac{n}{a}$$

I valori ottenuti in alcune applicazioni della [13'] sono riportati nella tabella:

TAV. V.

Dati		Tasso calcolato	Tasso esatto
n	a		
5	4,32947667	0,05000	0,05
11	8,30641422	0,050002	»
21	12,82115271	0,05001	»
31	15,59281050	0,05003	»
41	17,29436796	0,05007	»
51	18,33897663	0,05015	»

(⁴) Designando con \log il logaritmo volgare, si ha
 $\log z = 0.43429448 \log_e z$.

CARRIERA SCOLASTICA ED ASSICURAZIONI UNIVERSITARIE

MARCELLO BOLDRINI

1. Che la carriera scolastica, specialmente universitaria, fornisca una misura della capacità e della preparazione intellettuale di un soggetto, è cosa che si è sempre creduta, e della quale, al tempo stesso, si è sempre dubitato. Nei concorsi pubblici si tiene generalmente conto dei punti riportati dagli aspiranti negli esami speciali e nella laurea, e a talune carriere — come quelle della magistratura e della diplomazia — si ammettono solo i giovani che abbiano conseguito almeno certe votazioni minime. Anche le grandi aziende private domandano alla carriera scolastica una prima, sommaria informazione circa le attitudini degli aspiranti agli impieghi, mentre, dal canto loro, i genitori si rallegrano se i loro ragazzi superano bene gli esami, e si rattristano — nonostante una più che giusta indulgenza — quando tornano a casa con votazioni cattive. D'altra parte, tanto lo Stato, quanto i privati assumono sempre il nuovo personale con la clausola di un periodo di prova: e ciò, evidentemente, perchè non ripongono piena fiducia nella attendibilità della carriera scolastica, oltre che — ben si intende — per saggiare le attitudini specifiche dei tirocinanti. Quanto agli studenti, essi sono sempre pronti a

considerare i buoni voti come una giusta ricompensa del valore intellettuale e dello studio assiduo; ma, appena essi ottengono un esito scadente, si animano di santo sdegno, ed eccoli pronti ad affermare che l'esame è come un gioco di bussolotti, che premia gli infigardi, mentre misconosce quasi sempre la vera virtù.

Sono fondati, sia la fiducia, sia i dubbi intorno al valore informativo della carriera universitaria? E, posto ch'essa misuri in modo soddisfacente le attitudini e la preparazione generale degli esaminati, forniscono i voti un elemento utile per un sistema assicurativo, che dovrebbe sovvenzionare gli studenti degli ultimi anni di università e i giovani laureati in attesa d'impiego, verso un corrispettivo di premi differiti? La risposta a queste due domande costituisce la ragione del presente articolo.

2. E' indubitabile che i voti degli esami speciali universitari forniscono una misura alquanto imperfetta delle attitudini e della preparazione della studentesca. Fra i possibili modi di dimostrare ciò, ho scelto quello semplicissimo di seriare una massa di esami di giurisprudenza, approvati con punti da 21 a 30 (tab. I). Le frequenze hanno un andamento molto irregolare, con tre minimi e quattro massimi. I massimi cadono nei punti 21, 24, 27, 30, che implicano una votazione concorde dei tre esaminatori: i minimi corrispondono, invece, ai voti 22, 25, 29, due dei quali sono dispari. La preferenza per i punti pari è attestata da 1884 casi, contro 1152 voti dispari. Il minimo assoluto della serie cade su un voto dispari, il 29, e ciò rivela, fra l'altro, la tendenza ad arrotondare a 30 — una cifra che ha il doppio pregio di essere pari e di terminare per zero — il punteggio degli esami migliori, anche quando non siano addirittura ottimi. Appunto sul 30 cade il massimo assoluto della frequenza, e ciò in palese

contrasto con quanto avviene per la generalità delle distribuzioni statistiche, nelle quali le varianti estreme sono quasi sempre rare.

TABELLA I. — Frequenza degli esami universitari di giurisprudenza, approvati con punti 21-30.

Voti	Frequenze
21	143
22	133
23	142
24	437
25	253
26	318
27	511
28	422
29	103
30	574
Totale	3036

Ma nella serie si notano altre caratteristiche, le quali certo non rispecchiano reali differenze nell'intelligenza e nella cultura degli esaminati, per esempio questa, del tutto inattesa: che il 25, cioè un numero terminante per 5 e che è il quadrato di 5 (e perciò, di solito, per esempio nelle dichiarazioni di età, attira molte preferenze) è assegnato relativamente di rado. Ciò, non solo per effetto del punto immediatamente inferiore, il 24, spesso preferito per il motivo accennato sopra, ma, a quanto pare, anche per una predilezione a favore del punto terminante per sei, il quale non ha altro prestigio fuor che

quello di essere pari. Analoga situazione si presenta per il 28, il quale concorre forse col 30 nel rendere rari gli esami approvati con 29.

Evidentemente, tutto ciò è dovuto ad errori sistematici degli esaminatori, i quali, anche nel coscienzioso esercizio della loro funzione di giudici, portano la usuale tendenza a preferire le cifre rotonde e pari, a quelle rotte e dispari. Il professore, dovendo esprimere il proprio giudizio dopo pochi minuti di interrogazione, in base ad alcune domande staccate e rivolte a caso a ragazzi emozionati e inesperti, che gli passano davanti come le immagini del cinematografo, porta, fra l'altro, nelle valutazioni, il peso delle abitudini, dei vizi mentali, della fretta, ripetendo meccanicamente certi punti, che gli si affacciano più presto al ricordo, e quasi dimenticando l'esistenza di altri, nella gamma abbastanza estesa, di cui, in teoria, potrebbe disporre.

La conclusione che sembra discendere da tutto ciò, è una conferma dell'opinione corrente, che considera i risultati degli esami come una misura appena approssimativa della capacità e della preparazione degli studenti.

3. Ma il panorama cambia del tutto, appena si adotti un punto di vista più rigoroso e profondo. Ci si convince, allora, che il colpo d'occhio esperto e lo spirito critico, sempre desto, creando un valido contrappeso ai motivi di errore sopra ricordati, permettono al docente di differenziare i giovani, collocando ciascuno abbastanza esattamente nel posto che gli compete, date le sue capacità naturali, la sua coltura, la sua preparazione specifica all'esame.

Ho prelevato due campioni di laureati in giurisprudenza, che hanno percorso l'intero quadriennio nella stessa Università ed hanno sostenuto 16 esami comuni, insieme ad altri esami diversi, nel numero necessario per completare il *curri-*

culum. Il primo campione è formato da 20 giovani, il secondo (comprensivo del primo) da 80. L'uno e l'altro sono stati sottoposti al tipo di indagine detta oggi « analisi della varianza ». Il metodo ha origini abbastanza remote, perchè si collega agli studi del Lexis, sulla dispersione statistica: ma l'elemento nuovo, introdotto da R. A. Fisher, consiste nel valutare l'attendibilità dei risultati, in termini di probabilità.

Quantunque i procedimenti suggeriti dal Fisher abbiano conseguito ormai una grande rinomanza, ne darò quel rapido cenno che è necessaria premessa perchè tutti possano intendere i risultati della ricerca che segue.

Nella tab. II si leggono verticalmente gli esiti di $n = 16$ esami sostenuti da $m = 20$ studenti, elencati in senso orizzontale. Si tratta di stabilire se, nel loro insieme, i punti dei 16 esami differiscono sistematicamente, da uno studente all'altro, come se fossero stati estratti a sorte da 20 universi diseguali, oppure se differiscono solo a caso, come se fossero campioni diversi, estratti da uno stesso universo. La prima alternativa implicherebbe la conclusione che, nell'esito dell'esame, v'è una componente sistematica, dovuta alla capacità e alla diligenza individuale; la seconda, invece, escluderebbe tale componente, dimostrando che le votazioni di un dato giovane differiscono solo per caso da quelle degli altri.

In termini tecnici, si tratta di confrontare la variabilità delle colonne con quella delle righe della tab. II. Se l'una è inferiore all'altra, si avvera la prima alternativa, mentre dimostra la seconda il fatto che le due variabilità non differiscono sistematicamente. Il Fisher, non solo ha indicato il modo di rendere spedito e corretto il confronto, anche in piccolissimi campioni, ma ha altresì insegnato a valutarne il risultato.

Ricordiamo che la varianza è il quadrato dello scarto quadratico medio, ossia il rapporto fra la somma dei quadrati

TABELLA II. — Voti ottenuti in $n = 16$ esami

Esami (i numeri d'ordine corrispondono alle materie) n	Studenti (i numeri d'ordi m)									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	21	18	29	18	27	21	26	27	19	24
2	26	23	27	26	28	24	26	30	18	28
3	18	24	24	24	24	18	26	24	18	27
4	19	22	23	23	23	18	20	25	23	20
5	25	27	19	28	28	19	28	19	26	21
6	26	20	27	27	28	24	24	26	21	20
7	19	27	25	27	19	20	30	25	20	27
8	19	24	26	24	22	18	25	30	24	24
9	24	22	28	27	25	24	30	20	26	30
10	18	27	28	30	26	18	30	28	26	26
11	22	22	28	21	30	20	23	27	23	28
12	23	23	30	26	28	20	25	28	28	20
13	28	28	25	25	28	24	18	28	26	29
14	28	18	25	28	28	22	19	30	18	21
15	24	27	24	30	27	21	26	28	27	28
16	18	27	28	18	28	25	20	29	25	25
Totali dei punti	358	379	416	402	419	336	396	424	368	411
Medie M	22,375	23,688	26,000	25,125	26,188	21,000	24,750	26,500	23,000	25,688

speciali da $m = 20$ studenti in giurisprudenza

ne corrispondono ai nomi)										Totale dei punti Media
<i>m</i>										
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
21	28	22	30	20	27	30	27	24	28	—
27	29	26	30	28	28	30	30	26	30	—
24	27	20	27	29	21	30	25	27	27	—
21	29	19	29	26	27	30	30	27	27	—
20	26	20	24	30	27	30	30	30	24	—
23	27	20	28	24	19	30	26	25	27	—
24	27	18	25	30	28	30	27	22	27	—
24	28	23	26	30	27	30	27	26	30	—
24	28	18	27	30	28	30	30	26	30	—
24	28	22	30	30	30	30	30	22	30	—
22	30	24	27	26	27	30	28	30	27	—
26	28	23	26	27	21	30	29	26	27	—
27	30	22	27	28	30	30	30	27	24	—
24	30	22	25	30	30	30	28	24	24	—
23	27	23	27	30	24	30	26	18	30	—
19	30	20	20	30	21	30	29	28	28	—
373	452	341	428	448	415	480	452	408	440	8146
23,312	28,250	21,312	26,750	28,000	25,938	30,000	28,250	25,500	27,500	25,456

degli scarti dalla media aritmetica e il loro numero, diminuito di uno (numero dei gradi di indipendenza).

Chiamiamo $(n.m-1) \sigma^2$ la somma dei quadrati degli scarti delle $n.m$ quantità fornite dalla tab. II, dalla loro media aritmetica, e perciò σ^2 sia la loro varianza. Chiamiamo $m(n-1) \sigma_n^2$ la somma dei quadrati degli scarti delle colonne dalle rispettive medie, indicando con σ_n^2 la media delle varianze effettive delle colonne stesse. Sia infine $(m-1) \sigma_m^2$ la somma dei quadrati degli scarti delle medie delle righe dalla loro media aritmetica (che è pure la media generale), e quindi σ_m^2 sia la varianza delle 16 medie orizzontali. Si dimostra facilmente la seguente uguaglianza:

$$(n m-1) \sigma^2 = m(n-1) \sigma_n^2 + (m-1) \sigma_m^2 .$$

Il calcolo della varianza generale σ^2 , della varianza delle colonne σ_n^2 , della costante σ_m^2 che possiamo considerare come varianza delle righe, non presenta difficoltà. Eseguito sui dati della tab. II, ha fornito i risultati che si leggono nelle col. 1-4 della tab. III.

TABELLA III. — Analisi della varianza dei voti ottenuti in $n = 16$ esami speciali da $m = 20$ studenti di giurisprudenza.

1	Somme dei quadrati 2	Divisori 3	Varianza col. 2 : col. 3 4	$\frac{1}{2} \log_e$ della varianza 5
Varianza delle colonne $n = 20$	2448	$m(n-1) = 300$	8,160	1,055620
Varianza delle righe $m = 16$	1787	$(m-1) = 19$	94,052	2,271925
Varianza generale $m n = 320$	4235	$(n m-1) = 319$	13,276	$\chi = 1,216305$

Ma, come si è accennato sopra, R. A. Fisher non si è limitato a suggerire i concetti ora applicati per la misura della varianza verticale (i vari esami di ciascuno studente) e orizzontale (i vari studenti che hanno sostenuto un dato esame) delle votazioni universitarie: egli ha altresì insegnato a confrontare fra loro le due varianze. Serve allo scopo la quantità z , che si legge nella col. 5 della tab. III, e corrisponde alla metà della differenza fra i logaritmi naturali di σ_m^2 e σ_n^2 , ossia al logaritmo naturale del rapporto $\sigma_m : \sigma_n$. La quantità z è una costante che figura in una distribuzione studiata dal Fisher e corrisponde a un'ascissa, la cui ordinata delimita una frazione della curva della distribuzione stessa. Il rapporto fra l'area a destra dell'ordinata di z e l'area complessiva misura, in termini di probabilità, l'attendibilità del divario esistente fra σ_m^2 e σ_n^2 . Per tale motivo, z assume il significato di un indice di attendibilità, e merita, quindi, la qualifica di *test*, datagli dal suo autore. Poichè i calcoli presentano notevoli difficoltà, il Fisher ha cercato di semplificarli, costruendo un prontuario, il quale non fornisce la probabilità di dati valori di z (probabilità che, fra le altre cose, dipende anche dal numero dei gradi di indipendenza $n-1$ e $m-1$ e quindi presenterebbe una intavolazione molto complicata), ma indica il valore di z che (pei dati gradi di indipendenza) avrebbe piccole probabilità di verificarsi: in particolare il valore di z con probabilità di $1/20$ e di $1/100$. Se un valore sperimentale di z supera quello teorico avente la piccola probabilità di $1/20$ e, più ancora, l'altro del quale la probabilità è appena di $1/100$, si dirà che le due varianze date differiscono fra loro in modo significativo.

Nel caso che qui si considera, per i gradi di indipendenza 19 e 300 (col. 3 della Tab. III) il valore di z avente la probabilità di $1/20$ è cinque volte più piccolo di quello sperimentale, e quello con probabilità di $1/100$ è inferiore $2\ 1/2$

volte. Dunque, il valore ottenuto a calcolo di $z = 1,216$ dimostra un divario significativo fra la varianza dei punti di uno stesso esame e quella dei punti di uno stesso studente. Operando in modo del tutto analogo sul campione di 80 studenti, si è trovato $z = 1,149$, che supera circa 10 volte il corrispondente valore teorico avente $1/20$ di probabilità.

Si deve perciò concludere — così come si accennava all'inizio del presente paragrafo — che la componente individuale influisce sull'esito degli esami universitari in modo molto forte, e ciò malgrado le inevitabili e indubbie imperfezioni di giudizio, in cui incorrono gli esaminatori. Per conseguenza, considerati in generale, i voti universitari forniscono una misura importante dell'attitudine e della preparazione specifica degli esaminati.

4. Gli ultimi anni d'Università rappresentano per i genitori degli studenti il periodo del massimo sforzo finanziario, perchè richiedono, non di rado, la mobilitazione di estreme risorse, e perchè i ragazzi, cresciuti in età, anche quando siano saggi e rispettosi, aumentano inconsapevolmente le proprie esigenze e le proprie spese. Chi vive nelle scuole superiori sa che gli studi costano molto cari; che la massa degli studenti è povera; che molti sono costretti a prolungare le vacanze, per vivere economicamente in famiglia, e a cercare modeste occupazioni, in qualche caso perfino manuali, per arrotondare i mediocri assegni, attesi con ansia ai primi di ogni mese. Di qui, le assenze lamentate, e tuttavia tollerate con indulgenza dai docenti consapevoli, di cui mira ad estirpare la causa la saggia dichiarazione III della Carta della Scuola.

Vero è che esistono in tutte le sedi universitarie fondazioni di borse di studio, mentre funziona pure per legge una Opera Universitaria, e la beneficenza pubblica e privata garraggiano nell'aiutare gli studenti bisognosi più meritevoli: ma

sono sempre gocce d'acqua, su un terreno bisognoso di ben più ampi mezzi finanziari, per ricavare dalle Università quei frutti che sarebbe giusto attendere dal valore dei docenti, dalla progredita attrezzatura tecnica, dalle spese e dalla fede che in esse ripone lo Stato.

A me pare che l'Opera Universitaria contenga *in nuce* una idea la quale, opportunamente modificata e svolta, potrebbe risolvere, in armonia coi principi della Carta della scuola, il problema del sollievo finanziario dei giovani migliori, e quindi anche — correlativamente — i problemi della frequenza e del profitto negli studi. Infatti, a formare i fondi dell'Opera Universitaria contribuiscono obbligatoriamente gli antichi allievi dell'Università iscritti negli albi professionali, e le somme raccolte vengono erogate a sgravio delle tasse scolastiche, per gli studenti più valorosi e meno abbienti. Basterebbe passare dal sistema dei versamenti imposti a coloro che sono ormai lontani dalla scuola in favore di coloro che ancora la frequentano, ad un sistema di sovvenzioni basate sull'impegno, da parte di coloro che le ricevono, al rimborso mediante pagamenti periodici alquanto diluiti nel tempo. Posto in questi termini, il problema sembra risolubile senza gravi difficoltà sul piano assicurativo.

5. V'è un altro aspetto della stessa questione, non meno importante, quantunque assai più trascurato di quello relativo alle sovvenzioni scolastiche.

L'intervallo fra la laurea e gli esami di Stato, i concorsi, l'attesa dell'impiego, la fine del tirocinio professionale, crea, quasi sempre, al neo dottore quella serie di ostacoli, che inevitabilmente accompagnano ogni radicale cambiamento di condizione sociale.

Da una parte, i genitori anelano a ridurre le sovvenzioni mensili, perchè i loro ragazzi hanno ormai in mano il titolo

necessario e, almeno nelle speranze, sufficiente per farsi una posizione. Dal canto loro, i laureati sono costretti a rinunciare alla economica vita in famiglia, non già per la smania di inurbarsi e per insofferenza del meschino villaggio natio, ma perchè questo non offre nessuna possibilità al loro lavoro, mentre la presenza sul mercato della domanda è condizione indispensabile per mettersi a posto.

Nella media cittadina ed anche nel grande centro, alla necessità di un guadagno che tarda a giungere, fa riscontro l'altra, urgente, di iniziare un'esistenza assestata e di rinnovare il guardaroba esausto, perchè un giovane uscito dalla Università deve presentarsi meglio di uno studente se, anche con un certo decoro esteriore, vuole conquistarsi la simpatia di chi potrebbe domandare il suo lavoro. E allora? Come evitare di accettare un'occupazione qualsiasi — ciò che alle volte tradisce la vocazione e delude le giuste speranze dei parenti — anzichè aspettare con calma fiduciosa la sistemazione adatta, ciò che è anche un dovere sociale, nei giorni nostri, in cui si è compresa tutta l'importanza della selezione e dell'orientamento professionale? Se, qualche volta, il mecenatismo viene incontro ai giovani promettenti, usciti da scuole speciali (di canto, di pittura, ecc.), è assai raro che il dottore in legge, l'ingegnere, il medico trovino chi si assuma l'impegno di assisterli economicamente, nei primi passi della vita postuniversitaria e della professione. Ancora una volta, si affaccia alla mente la soluzione assicurativa. Come l'assicurazione ha ormai soppiantato la beneficenza nell'alleviare, diluendole nel tempo, le conseguenze economiche della morte, così è tempo ch'essa intervenga nel momento in cui i giovani escono dalle Università, ed hanno bisogno dei mezzi economici per concedersi un periodo di respiro ed orientarsi nella carriera, che dovrà decidere della loro intera vita.

6. Abbiamo, così, prospettato due possibilità assicurative analoghe, l'una a favore degli studenti degli ultimi anni di Università, l'altra per i giovani laureati, in attesa di impiego.

In breve, l'ente assicuratore dovrebbe assumersi il rischio di pagare, ai giovani che si trovano nelle condizioni prestabilite, una modesta rendita, per uno o due anni, verso il corrispettivo di premi futuri, decorrenti dalla scadenza della rendita, o anche differiti per un intervallo massimo fissato. Un contratto di questo tipo trova già nel nostro paese numerosi riscontri generici, che permettono di considerarlo possibile, anche prima dello studio attuariale. Difatti, che altro sono, se non assicurazioni di capitali o di rendite immediate con premi differiti, l'assicurazione per la maternità e la tubercolosi, dato che questi rischi hanno carattere essenzialmente giovanile e trovano la loro contropartita in premi corrisposti fino alla fine dell'età lavorativa? Più vicina ancora al contratto ora sommariamente definito è la vecchia formula della cessione del quinto dello stipendio, da parte dei funzionari pubblici ⁽¹⁾.

Naturalmente, oltre ad evidenti somiglianze, esistono anche importanti differenze fra questi contratti e la proposta assicurazione universitaria e postuniversitaria: differenze che, però, non sembrano tali da sconsigliare gli enti assicurativi da un loro esame attento.

Senza entrare affatto in un prematuro dettaglio attuariale — da lasciare ai tecnici della materia — preme ora solo mettere in evidenza la natura composta del rischio additato. Esso deriva, infatti, dalla probabilità di sopravvivenza, dalla probabilità di impiego collegata con le doti individuali, dalla congiuntura economica e forse da altre circostanze (tipo di laurea, luogo di residenza, ecc.). Dal secondo elemento, deriva

⁽¹⁾ Forse anche la vendita a rate può essere considerata come l'assicurazione di un capitale attuale verso il corrispettivo di premi futuri.

la necessità di indici di attitudine che — in base alle conclusioni del § 3 — l'attuario potrà desumere dai voti universitari. Certo è impossibile precisare, coi soli elementi ora disponibili, il legame funzionale fra carriera universitaria e probabilità di impiego: ma una ricerca sperimentale ed opportune ipotesi teoriche risolverebbero con relativa semplicità il delicato e importante problema.

Concludiamo ricordando che la studentesca tocca ormai, in Italia, le 80 mila unità e che il numero annuo dei laureati e dei diplomati ascende a 12 mila. La massa degli eventuali aspiranti alla progettata assicurazione universitaria e postuniversitaria non potrebbe, dunque, nemmeno lontanamente paragonarsi con quella da cui, di solito, si reclutano i rischi assicurativi. Essa non è, tuttavia, tanto esigua da non permettere la formazione di un portafoglio statisticamente stabile. Ma in questo caso, la considerazione del numero snuirebbe il più profondo significato sociale. Dei due contratti a favore degli studenti e dei laureati profitterebbe la parte più eletta delle nuove generazioni, quella in cui si recluteranno i professionisti, gli artisti, i funzionari, gli ufficiali dell'esercito, i capi degli organismi economici e commerciali, la stessa classe politica. Fare in modo che le aristocrazie sociali, in uno Stato corporativo, non siano alimentate solo dai più abbienti, ma dai soggetti intellettualmente più dotati, è un fine così evidentemente alto, che ogni sforzo fatto per realizzarlo — anche da parte degli enti statali di previdenza, anche con un contributo finanziario dello Stato — può rappresentare un passo importante verso il civile progresso.

ATTITUDINI E CAPACITA' NELLO STUDIO E NEL LAVORO

MARIO PONZO

1) DISORIENTAMENTI ATTUALI INTORNO AL CONCETTO DI ORIENTAMENTO.

I cultori della psicologia, spesso dimenticati, più spesso non compresi ed avversati, hanno ritenuto sin qui di poter ascrivere fra i loro pochi meriti quello di aver precisato attraverso un trentennio di ricerche che cosa possa intendersi per orientamento scolastico e professionale. Ora accade che dello stesso termine, dopo l'avvento della Carta della Scuola, da taluno si usi e si abusi, impiegandolo per diritto e per traverso nei significati più vari e più inaspettati.

Indipendentemente dal fatto che si voglia o meno accogliere il concetto di orientamento come si era formato in scienza, questa incertezza nel significato da darsi, nel nostro Paese, a tale concetto è pericolosa perchè, se non si torna almeno a concepirlo in modo univoco, ne va di mezzo non solo la dottrina, cosa che potrebbe anche poco importare nella pratica, ma pure, e qui sta il grosso guaio, l'opera stessa dell'orientamento.

E' bene quindi procedere ad una chiarificazione del concetto partendo dalla lettera della Carta della Scuola, per

assurgere a comprenderne lo spirito al fine di potere, illuminati da questo, superare ogni dubbio interpretativo e di indirizzo nelle applicazioni pratiche.

Tutto ciò molti dimenticano: e soprattutto lo scordano coloro che vivono e si muovono sul piano di loro speculazioni ideali, lontane e dalla pratica e dalla palestra del pensiero giuridico, che qui deve servirci da punto di partenza.

Anche prima dell'emanazione della Carta della Scuola si trovano in leggi italiane disposizioni rivolte allo scopo di avere uomini adatti al lavoro loro affidato; ma certo la Carta ha rotto ogni indugio preparatorio nei riguardi delle due opere dell'orientamento e della selezione, mettendole a fondamento della stessa scuola.

Nella Carta della Scuola sta infatti scritto alla III dichiarazione: « *L'indirizzo culturale e l'orientamento professionale costituiscono i compiti preminenti della Scuola al fine di provvedere, secondo ragione e necessità, alla preparazione di uomini capaci di affrontare i problemi concreti della ricerca scientifica e della produzione. Il principio della selezione opera di continuo nella scuola a salvaguardia della sua funzione e della particolarità dei suoi istituti* ».

Sempre secondo la Carta (VII Dichiarazione): « *scuola e famiglia concorrono ai fini dell'educazione e dell'orientamento degli alunni* ».

A lor volta « *l'accesso agli studi e le direttive del loro proseguimento devono essere regolati, a norma della III Dichiarazione, esclusivamente dal criterio delle capacità e delle attitudini dimostrate* ». Queste ultime debbono essere accertate con i mezzi della scuola, in quanto (VI Dichiarazione) « *studio, esercizio fisico e lavoro forniscono alla scuola i mezzi per saggiare le attitudini* ».

2) I CONCETTI DI ATTITUDINI E DI CAPACITÀ NELLA LEGISLAZIONE DEL LAVORO E NELLA CARTA DELLA SCUOLA.

Precisata questa impostazione e queste direttive generali, le altre che ne derivano nel campo pratico non possono, nè debbono, trovarsi da esse discordanti poichè della Carta della Scuola si deve fare fondamento per la nuova scuola fascista.

Perciò è in me la profonda convinzione che entro questi limiti, dati dal rispetto della lettera e dello spirito della Carta, una esatta comprensione di alcuni termini che si trovano espressi in essa può indubbiamente servire ad appianare pericolose divergenze fra opinioni e indirizzi di studiosi, che a tutta prima appaiono insanabili. Così ad es., dalla precisazione e dalla comprensione dei due termini « capacità e attitudini », che la Carta ci presenta affiancati nella stessa III Dichiarazione, io ritengo possa venire eliminato un profondo contrasto sull'essenza del concetto dell'orientamento, che alcuni identificano con quello di formazione, di indirizzo culturale, di avviamento professionale, e persino di educazione nel suo complesso.

Non raramente accade oggi di vedere impiegati, anche in scritti a carattere scientifico, i termini di attitudine e di capacità l'un per l'altro, quasi sinonimi. Questo non avviene invece, a ragion veduta, in un documento quale la Carta della Scuola, nel quale ogni termine è stato soppesato nel suo razionale significato, attraverso cui risulta delineata l'intenzione di chi l'ha forgiata con profonda sapienza e con esperienza viva. In essa i due concetti di attitudine e di capacità sono stati affiancati nella stessa III Dichiarazione, non certo per facilitarne la fusione in un solo significato ma per accentuarne invece il differenziamento. Ciò è confermato dal testo

della VI Dichiarazione. In quest'ultima infatti il saggio delle attitudini appare quale la premessa necessaria perchè la scuola possa preparare e costituire nei giovani quelle capacità che ne faranno degli uomini adatti ad attendere ai problemi della ricerca scientifica e della produzione.

Dirò di più: è attraverso lo stesso linguaggio giuridico che si può seguire, per lo meno in parte, l'affermarsi progressivo ed il farsi più consueto e differenziato nell'uso dei termini di capacità e di attitudini. Ed è interessante notare come, anche a questo riguardo, sia possibile stabilire le relazioni di derivazione della Carta della Scuola dal pensiero legislativo nel campo del lavoro. E' infatti nelle leggi sul lavoro dove si trova il fermento che ha portato all'accentuazione dell'importanza del concetto di capacità al lavoro o al guadagno. La capacità al lavoro, in queste leggi, è stata considerata soprattutto sotto l'aspetto della sua diminuzione per effetto di cause violente o ancora per l'influenza dei fattori vecchiaia o malattia.

Nella stessa legislazione del lavoro il concetto di attitudine lavorativa si è andato lentamente differenziando da quello di capacità. Ed infine, mentre nella legge contro gli infortuni il termine di attitudine è impiegato al singolare, come dote a carattere unitario, comune per tutti i lavori e a tutti i lavoratori, nella nuova legge sull'assicurazione contro l'invalidità e la vecchiaia viene usato quello di « attitudini al lavoro », al plurale, ammettendo così implicitamente la molteplicità e la varietà di forme di queste ultime nello stesso individuo e, ancor più, nei diversi individui.

Secondo la Carta della Scuola, espressione recentissima di un pensiero che è insieme politico e legislativo, in ogni ordine di scuola lo studio, attività preminentemente intellettuale, viene affiancata al lavoro muscolare, attività questa mentale e fisica insieme. Appare quindi naturale che in essa

si ritrovino i due concetti di capacità e di attitudini che erano andati maturando nel campo dei problemi del lavoro; e che essi siano messi in evidenza nei loro plurali ed in un accostamento, il quale intende essere eminentemente differenziatore.

Si può così incominciare a renderci anche conto del perchè nella Carta della Scuola si parli di attitudini e di capacità e non invece di intelligenza e di volontà o di altre facoltà, alle quali l'orecchio dell'educatore era assai più assuefatto in passato nel considerare e valutare la personalità del discente.

3) LA PSICOLOGIA ATOMISTICA DEL PASSATO E LA MODERNA PSICOLOGIA DELL'AZIONE.

Se il pensiero giuridico ci permette di rilevare questo nobilissimo trapasso dei concetti di attitudine e di capacità dal campo del lavoro a quello della scuola, è invece sul piano di quella scienza che si occupa dei fatti e delle funzioni psichiche, cioè della psicologia, che noi possiamo trovare la migliore opportunità per giungere non solo a comprenderli ma anche ad afferrare il perchè del trapasso.

Il termine di attitudine, che oggi non suona nuovo nemmeno al profano, è divenuto predominante nel linguaggio scientifico dello psicologo solo negli ultimi decenni. Esso va sempre più imponendosi in psicologia, perchè in fondo si intona perfettamente a quelli che noi diciamo gli indirizzi moderni della nostra disciplina.

I vecchi psicologi, nella loro pur preziosa opera analitica, non lo trovavano necessario e lo impiegavano raramente, mentre assai maggiore impiego aveva trovato il termine di capacità, nel senso di potenza dell'anima.

Nella loro fine opera di dissezione della personalità umana i filosofi avevano incominciato, particolarmente col Cartesio, a separare nettamente l'anima dal corpo. Prima e dopo Cartesio essi erano proceduti all'esplorazione delle facoltà dello spirito e quest'ultimo era stato segmentato sempre più nell'ansiosa ricerca dei suoi elementi primi. Non potevano infatti sottrarsi, nè psicologi, nè filosofi a quello che è stato per tanto tempo l'indirizzo generale nel campo delle scienze. All'elemento atomo era giunto il chimico; all'elemento cellula era giunto il fisiologo; ed anche la psicologia ritrovò infine i suoi elementi primi nelle sole sensazioni oppure nella coppia costituita dalle sensazioni e dai sentimenti. Da questi, per virtù aggregativa misteriosa, si riconoscevano formati, come le molecole in chimica dalla riunione di atomi, le formazioni psichiche più complesse: ad es. le immagini, le emozioni, i pensieri e molte altre ancora.

Nemmeno ora sono da spregiarsi i risultati della psicologia atomistica, ma certo a noi, psicologi di oggi, appare essere stata vana la pretesa di potere, dopo questa opera di polverizzazione, ricostituire dagli atomi psichici l'unità che vive, che palpita, che pensa.

Questo indirizzo, se ha posto in evidenza una ricca fenomenologia psichica, ha trascurato molto quelli che sono i dinamismi dell'anima. Se i fatti conoscitivi apparvero più chiari, nella penombra rimasero tutte le attività non concretabili in qualcosa che avesse il carattere di un oggetto interno.

Infine, ci appare oggi quale una concezione sospesa nel vuoto quella di aver pensato alle attività mentali come distinte e contrapposte a quelle del corpo. Invano infatti molti e grandi pensatori si sono tormentati nella ricerca di dottrine adatte a spiegare i raccordi fra i due ordini di fenomeni, perchè mai tali dottrine sono riuscite convincenti e fondate su solide e accettabili basi.

La psicologia nei suoi nuovi indirizzi si sviluppa su un concetto unitario della persona, che abbraccia insieme l'organismo e il fatto psichico, ciò che non ostacola le concezioni religiose di un'anima sopravvivente al corpo. Il moderno studioso dei fatti psichici si pone insomma di fronte ad una realtà concreta, per la quale nel vivente anima e corpo sono da studiarsi, nel campo della scienza, nella loro inscindibilità.

Il concetto di individuo si riavvicina così oggi finalmente al suo significato etimologico, cioè a quello di entità indivisibile. Questo individuo vivente si rivela poi a sè e agli altri attraverso la sua attività, che è fisica e psichica ad un tempo.

E poichè la scienza, sospinta dalla necessità del suo ulteriore sviluppo, non può sfuggire al compito di una indagine analitica, gli psicologi si sono andati avviando all'analisi del comportamento degli esseri viventi sull'orma degli psicologi americani.

I neurologi erano riusciti, già da decenni, a porre a base dell'analisi funzionale del sistema nervoso, il riflesso, che è un'unità prima a carattere formale e funzionale, poggiata su un fondamento non astratto ma reale: oggi gli psicologi si avviano a trovare un'unità simile, altrettanto reale e naturale, nelle singole azioni dell'individuo.

Nell'uomo le azioni si rivelano nel modo di comportarsi sotto la spinta di moventi più o meno consapevoli ed in vista di particolari fini. Di esse possono quindi distinguersi in uno stesso individuo infinite forme suggerite da singole situazioni interiori o ambientali. Fra le forme di azione rientrano tanto quelle che si esteriorizzano con moti, quanto quelle altre che si svolgono interiormente e che un giorno furono anche dette operazioni mentali.

Nelle azioni, considerate nelle loro immense varietà anche in un solo essere umano si riflettono naturalmente quelle

che nella vecchia psicologia, in base a concezioni astratte, figuravano quali potenze a sè stanti, operanti nel soggetto isolatamente o in gruppo secondo immaginari rapporti delle une con le altre. Ben diverso valore acquistano però oggi, nella loro nuova veste di fattori di ogni singola azione, anche se continuiamo a usare i vecchi nomi di volontà, di intelligenza, di immaginazione, ecc.

Fra i fattori dell'agire umano che l'indagine moderna ha messo in rilievo si delineano quelli che nell'ambiente o nel soggetto facilitano od ostacolano l'azione, precedendola od accompagnandola.

Tali fattori sviluppano le loro influenze in modo diverso a seconda degli individui in quanto ciascuno di questi si rivela un'unità, che pur avendo caratteristiche comuni con gli altri esseri della sua specie, si presenta diversa da ogni altra nella sua attività. Nella determinazione della diversità sono riposti i compiti della psicologia differenziale.

Assumono poi una importanza di primo ordine i raccordi fra il modo di agire dell'individuo e le esigenze della collettività nella quale esso è incorporato. Non solo quindi nell'individuo singolo la psicologia dell'azione si impone ma anche nella psicologia collettiva: in quanto le differenze fra le collettività, fra le razze, fra i popoli sono viste nelle differenze del loro modo di operare.

Facile infine, sulla base di questo assieme di concezioni che prendono lo spunto dall'azione, è il trapasso alle considerazioni sui mezzi psichici che esercitano le loro influenze sull'agire umano e quindi l'inserirsi della psicologia generale nel vastissimo campo delle sue applicazioni.

4) LE ATTITUDINI QUALI DISPOSIZIONI NATURALI.

Con riferimento alla questione che qui ci interessa si è precisamente prendendo come punto di partenza l'unità dell'azione che si rischiara il concetto di attitudine, nel senso di qualche cosa a carattere potenziale, connaturato in noi, e che consiste nella disposizione ad operare meglio di altri, e con minore sforzo, in determinate sfere di studio, di azione, di lavoro.

A precisare questa concezione convergono varie definizioni formulate da pensatori diversi, in tempi diversi. Una, è quella che io stesso ho dato, in occasione di un primo corso di orientamento professionale, che ho svolto nel 1926 ad un gruppo di insegnanti e di capi d'arte a Torino. Essa suona così: *Le attitudini sono disposizioni naturali fisiche, psicofisiche, psichiche, le quali rendono possibile a chi le possiede lo svolgimento di particolari forme di attività.* Oggi, pur mantenendola nei suoi connotati essenziali, preferirei ad essa la definizione che ho letta di recente nel volume « Psicotecnica » di due studiosi belgi: Sollier e Drabs. Per costoro l'attitudine è « *una disposizione naturale a fare subito una cosa, senza previa istruzione, meglio e più facilmente che la media delle persone nelle stesse condizioni* ».

Varie altre definizioni potrei qui riportare, che in alcuni punti si differenziano, ma che nelle loro parti più vitali si identificano con quelle già date, segnalando le caratteristiche fondamentali delle attitudini, che vediamo oggi accolte particolarmente nella pratica del lavoro e della scuola.

In base alle definizioni che ho date le attitudini ci appaiono intanto quali disposizioni che sono in noi per natura, venendo noi, con esse, al mondo. Le attitudini si richiamano alle disposizioni, che a loro volta possiamo concepire come

un substrato dinamico del nostro organismo. In ogni struttura degli organi del nostro corpo noi riconosciamo infatti sempre una disposizione adeguata al raggiungimento di determinati fini funzionali. Non altrimenti accade nel dominio delle attitudini al fare, all'agire, all'operare umano a seconda delle situazioni.

Colui che per la sua natura possiede l'attitudine a particolari forme di azione, nel momento in cui opera non prova soggettivamente quelle difficoltà che incontrano altri. Mentre questi ultimi possono anche riuscire a fare le stesse cose con sforzo, chi è in possesso di sufficiente grado di attitudine naturale, tale sforzo non sente, o lo sente assai meno, all'infuori anche di ogni influenza facilitante che può derivare dall'esercizio.

Un uomo che per natura sia dotato di una buona memoria dei luoghi si orienterà più facilmente sulla via del ritorno attraverso i deserti, i ghiacciai, i monti, che non un altro il quale possieda invece una buona memoria per i numeri. Quest'ultimo si troverà dal suo canto avvantaggiato in certe operazioni di calcolo. Colui che dispone di una statura alta può adempiere più facilmente che non un altro individuo, di statura bassa, un'operazione nella quale si richieda di raggiungere con la mano un oggetto collocato in alto. E così via per infinite altre situazioni dell'operare umano!

Questa facilitazione all'agire in determinate situazioni può manifestarsi nel giovane con un sentimento di simpatia per certi modi e per certe direttive di azione. Altre volte il ragazzo avverte distinto tale sentimento come una chiamata interiore, che corrisponde a quanto spesso vien detto vocazione per certe forme di attività, professionali o meno. Altre volte ancora, il sentimento tace, ma nel giovane si nota la tendenza ad occuparsi, ad essere attivo in certi settori della vita sociale anche senza esservi punto obbligato.

La spontaneità della tendenza ad attendere a qualcosa, bene si armonizza col carattere innato delle attitudini. Questi due tratti peculiari delle attitudini inducono a contrapporle ad altre manifestazioni di attività e di abilità che stanno sotto l'influenza dell'acquisizione di esperienze personali, dipendenti dall'apprendimento, dall'esercizio, dall'allenamento, e che possono venire conglobate entro il termine generico di influenze educative. Ma per certo non si può parlare di queste ultime quando si notano profonde diversità individuali fra i nati nello stesso giorno, nella stessa ora, dalla stessa madre, cresciuti di poi sotto uguali influenze ambientali! Posso a tal riguardo parlare anche un poco in base ad una mia esperienza personale formatasi attorno a due gemelle, non monocoriali, delle quali sono il padre; e che, già nelle loro prime manifestazioni dopo la nascita, si rivelarono diverse. Nonostante poi l'uguaglianza dell'ambiente familiare esse palesarono fra loro fin dai primi anni profondissime differenze attitudinali, che tutt'ora conservano.

Non ho esperienza diretta, ma molto ho letto sulle somiglianze attitudinali che si riscontrano nei gemelli veri, anche se allevati in ambienti diversi. Sono stati appunto gli studi sui gemelli che hanno servito particolarmente a chiarire i rapporti fra gli effetti sull'individuo del fattore naturale e di quello ambientale.

Nello stesso senso ci parla la precoce apparizione di alcune disposizioni attitudinali. Molti anni or sono, al primo Congresso internazionale di psicologia a Parigi, il Richet, quale esempio di ciò, presentava un bimbo che a tre anni sapeva già suonare il pianoforte.

Non di precocità di bimbi prodigi, ma di rivelazioni di veri geni musicali nel periodo dell'infanzia e della puerizia si trattò del caso di Mozart, che fece le sue prime composizioni a 7 anni, di Händel, di Beethoven.

Analoga tendenza al presentarsi precoce si avvera, secondo la Baumgarten, per le disposizioni alle arti plastiche e per le attitudini tecniche (destrezza manuale); fatto che potrebbe spiegarsi con lo stretto rapporto di tali attitudini con la vita sentimentale e istintiva. Anche diverse attitudini scientifiche si vanno delineando più nettamente un po' prima della adolescenza.

Il fatto dell'apparire tardivo di attitudini, come, per es., è accaduto quando uomini maturi, che mai prima si erano occupati di armi e di armati, si rivelarono ad un tratto abili condottieri, non parla contro il carattere innato delle attitudini, perchè, come nell'esempio ricordato, si può pensare che solo tardivamente si sia concretata la situazione occasionale favorevole al palesarsi della particolare attitudine al comando.

L'attributo « naturale » richiama necessariamente alla mente quello di ereditario. Io sono convinto che le attitudini, di cui portiamo in noi le disposizioni fin dalla nascita, sono, il più spesso, espressioni di ereditarietà.

Non ostacola, secondo me, tale convinzione, la questione dell'ereditarietà delle qualità psichiche. Tale questione per me non ha diritto di sussistere nel dominio delle attitudini, quando ci si rifaccia a quell'unità dell'individuo vivente che lo scienziato studia, nella quale sono fusi i caratteri fisici con quelli psichici. Ogni atomo del corpo umano vivente si deve intendere rivestito di questi due aspetti, data appunto l'inscindibilità loro nel vivente. Diventa perciò impossibile considerare separatamente, nei confronti dell'ereditarietà, i tratti psichici da quelli fisici, perchè questi ultimi si presentano uniti ai primi.

Parla per questo discendere per i rami delle generazioni successive degli umani di certe forme attitudinali, il ripetersi loro nelle stesse famiglie.

La scienza va arricchendosi di questi esempi di trasmissione ereditaria di doti pregevoli e di doti antisociali. Già Galton nella sua inchiesta sul genio umano poteva dimostrarlo. In un gruppo di 300 famiglie egli aveva infatti constatato la presenza di 400 uomini di grande valore e di 600 uomini di spiccato talento.

Nello stesso gruppo di famiglie egli riscontrò il rinnovarsi di peculiari doti di intelletto in uomini che stavano fra loro nei vincoli più vari di parentela: padri, figli, nonni, bisnonni, nipoti, pronipoti, fratelli, cugini!

Assai più recentemente, quegli stessi modestissimi documenti del profitto scolastico rappresentati dalle pagelle, raccolti con teutonica diligenza negli archivi delle scuole germaniche, hanno consentito la constatazione che i figli tendono a distinguersi nelle stesse discipline nelle quali già si distinguevano i padri e le madri: ciò che conferma il carattere ereditario delle attitudini.

5) RAPPORTI FRA ATTITUDINI E TENDENZE ISTINTIVE.

L'assieme dei fatti ci porta a ritenere ereditarie le attitudini, le quali si rivelano come preferenze o come tendenze nel campo del fare, induce a pensarle in qualche modo affini, nel loro modo di annunciarsi, di attuarsi, di decorrere, ad altre forme di predisposizioni ad operare raggruppate sotto la denominazione di istinti. Anche le attitudini sarebbero forme di tendenze istintive.

Con gli istinti le tendenze attitudinali hanno di comune il carattere innato, la spinta impulsiva all'attuarsi loro, ed a volte il rivelarsi con particolari manifestazioni motorie. Possono distinguersene principalmente per la tenuità loro e per una differenziazione assai maggiore.

L'avvicinamento delle tendenze attitudinali a quelle istintive rende comprensibile la loro comparsa successiva e il loro esaltarsi sotto l'azione di fatti ambientali quali l'educazione o particolari avvenimenti accidentali della vita.

Nella maggioranza dei casi, le tendenze attitudinali rimarrebbero nascoste in germe nell'attesa dell'ora che ne faciliti il manifestarsi nelle complesse costellazioni date dall'assieme delle altre tendenze. La scuola costituirebbe spesso l'incentivo al loro sbocciare, poichè destando l'interesse per determinati oggetti di studio renderebbe possibili le prime manifestazioni di molte attitudini.

L'assimilazione delle attitudini alle tendenze istintive consente pure di afferrare le possibilità di modificazioni profonde della personalità durante gli sviluppi psichici, in rapporto con le complesse trasformazioni dell'equilibrio endocrino, che avvengono nelle diverse fasi del periodo evolutivo.

Questo accostamento ci mette infine di fronte alla questione del regresso e della scomparsa di certe attitudini; problema che è già stato affrontato da eminenti psicologi per quanto concerne gli istinti. Da un lato vi sono infatti le più recenti affermazioni di W. McDougall, il quale vede nell'istinto una forza che non si spegne se non apparentemente, per risorgere all'occasione propizia. Dall'altro vi è W. James, il quale, affermando che « diversi istinti maturano fino ad una certa età e quindi impallidiscono », ha dato una formulazione a quella che egli chiama *legge della transitorietà degli istinti*. « La conseguenza di tale legge, egli aggiunge, è che se, durante il tempo della vivacità di un istinto si riscontrano oggetti atti a risvegliarlo, si forma un'abitudine di agire su di esso, la quale permane anche quando è scomparso l'istinto originario: se invece non si incontra nessun oggetto di quel genere, non si forma quell'abitudine, e, più tardi, nella vita, quando l'animale incontra quegli stessi oggetti,

quasi non agisce come avrebbe fatto istintivamente in epoca anteriore ».

A conciliare queste opposte visioni conviene ricordare che, mentre McDougall riduce a pochi e fondamentali gli istinti, l'elenco invece che ne fornisce il James è assai lungo, e comprende fra essi un certo numero di quelle attività che noi possiamo considerare come tendenze attitudinali.

Io propendo ad accogliere, per lo meno in parte, il principio formulato dal James, particolarmente tenendo presente la speciale tenuità, in genere, delle tendenze attitudinali.

Laddove invece queste sono forti — come nei casi di talenti spiccati — esse devono considerarsi come insopprimibili e straripanti al di là di qualsiasi barriera che ne ostacoli lo sviluppo, analogamente al caso degli istinti fondamentali.

Abitualmente, nelle loro manifestazioni minime, le tendenze attitudinali hanno bisogno, non solo di essere coltivate, ma altresì che venga colta l'epoca più favorevole per un loro relativo potenziamento. L'avvicinamento delle tendenze attitudinali agli istinti viene così a complicare profondamente ogni criterio prognostico, in quanto, mentre in una concezione statica delle attitudini, i fattori dell'educazione, dell'esercizio, del governo degli interessi, ecc., si trovano minorati nella loro possibile efficienza, nell'ambito di una concezione dinamica il germe attitudinale può trovare possibilità di valorizzazione per la pertinenza di queste tendenze alla sfera latissima della volontà, al di là anche di quanto può essere consapevolmente e direttamente voluto o desiderato o sentito come inclinazione.

Di qui l'importanza del problema del possibile regredire di attitudini nello stesso periodo evolutivo della vita, onde, eventualmente, impedirlo! Di qui, l'interesse pedagogico di rintracciare, il più presto possibile, le tendenze attitudinali;

opera che è stata tentata dalla psicotecnica dell'orientamento professionale.

6) QUANTE E QUALI SONO LE ATTITUDINI.

L'impiego, oggi prevalente, del termine di attitudine nel suo plurale risponde alla convinzione, non solo scientifica ma anche dell'esperienza popolare, intorno all'esistenza di una molteplicità di forme attitudinali chiaramente differenziabili nella collettività umana. Solo per alcune poche, più evidentemente afferrabili, si danno denominazioni specifiche. Così si parla di attitudini alla matematica, al disegno, alla musica. Le attitudini dell'intelligenza vengono a lor volta denominate a seconda delle forme di questa: si afferma infatti un'intelligenza tecnica, un'intelligenza critica, un'intelligenza assimilativa, un'intelligenza creativa. Vengono ancora riconosciute particolari doti o attitudini nel dominio del carattere, del temperamento, della volontà. Ma nella loro maggioranza le attitudini non hanno altra possibilità di precisazione se non attraverso frasi le quali definiscono uno specifico compito di azione, di studio, di lavoro, in cui esse entrano in gioco.

Seguendo il Lipmann in un suo noto questionario sulle attitudini necessarie nelle varie professioni possiamo trovar modo di precisarle in numero rilevante, non con un nome ma con espressioni quali, ad es., le seguenti:

Attitudine:

- a esprimersi abilmente per iscritto;
- ad esprimersi facilmente e abilmente a voce;
- ad esprimersi abilmente col disegno;
- a rispondere brevemente ed in modo appropriato;
- a sapere presentare con molte frasi ed in molti modi una stessa cosa;

a comprendere ciò che è astratto;
a completare rapidamente e bene impressioni lacunari;
ad interpretare esattamente quello che è scritto illeggibilmente;

a rappresentarsi esattamente, intuitivamente, oggetti e loro parti;

a riprodurre subito ciò che si è inteso solo una volta;
a dominare prontamente quanto si sa a memoria;

a ricordare esattamente e per lungo tempo nomi che si sono intesi solo una volta o raramente;

a dirigere la propria attenzione con la stessa forza e per lungo tempo su un lavoro;

a saper concentrare molto fortemente l'attenzione in certi momenti;

a mutare rapidamente l'adattamento dell'attenzione, ed a adattarla a stimoli sempre nuovi;

a non lasciarsi distrarre da impressioni estranee o perturbanti;

a eseguire un lavoro monotono;

a cambiare sovente il genere di lavoro ed a adattarsi ogni volta rapidamente al nuovo lavoro senza perder tempo;

ad adattarsi rapidamente a esigenze insolite;

a gareggiare con altri;

a lavorare con molti altri nello stesso luogo;

a restar soli a lungo senza poter parlare con alcuno;

a decidersi rapidamente di fronte a cambiamenti di situazione;

a non lasciarsi dominare dai mutamenti di umore;

a comandare;

a obbedire;

a non lasciarsi influenzare dall'opinione di altri;

a organizzare, a ripartire in modo appropriato lavori determinati;

- a criticare il proprio lavoro;
- a rilevare rapidamente e a correggere impressioni difettose;
- a calcolare in fretta e bene per iscritto;
- a calcolare bene e in fretta mentalmente.

Numerosissime attitudini diverse si possono quindi riconoscere nella collettività degli uomini e valgono a differenziarli nei modi di agire. Ma non una sola attitudine, ma una molteplicità di attitudini esiste pure in ogni singolo individuo, in grado maggiore o minore: dall'accento attitudinale vago, al talento.

7) I LIVELLI ATTITUDINALI E LA INESISTENZA DI ATTITUDINI NEGATIVE.

In un passato recente, nel considerare l'attività mentale, l'attenzione degli studiosi è stata presa dall'intelligenza e dal suo sviluppo globale. All'epoca del Binet si è studiato a lungo il quoziente dell'intelligenza, cioè il rapporto fra età fisica e età mentale, e soprattutto il livello dell'intelligenza dei ragazzi. Ma in fondo, intendendo studiare l'intelligenza, si misero in luce numerosi fattori attitudinali. Più tardi, e soprattutto col metodo di Rossolimo — studioso che ebbe un grande merito nello studio delle attitudini — si parlò di profilo psichico, costituito da attitudini disparate, e si poté accertare le profonde disuguaglianze di valori attitudinali in quello che prima si chiamava livello. Oggi, nello studio analitico della personalità, si parla invece di livelli attitudinali, e si cerca di determinare questi ultimi anno per anno, in modo da poter ricavare lo sviluppo mentale globale da una molteplicità di curve analitiche di singole attitudini. Lo sviluppo delle varie forme di potere mentale avrebbe, per ciascuna di

queste, decorsi suoi speciali e caratteristici, sì che, una medesima attitudine, pur perdurando, potrebbe venire a trovarsi ora predominante rispetto ad altre ed ora dominata da queste ultime. Avverrebbe nella mente umana qualcosa di paragonabile a quanto si può scorgere in un prato, ove ciascuna sorta di pianticelle ha un suo periodo di maggiore sviluppo e di fioritura, ovverosia di relativa prevalenza sulla massa delle altre, per cedere poi successivamente la preminenza di fronte a quella di altre specie sotto l'azione di particolari fattori che vengono a favorirle nella successione del tempo che si svolge.

Tra le molte pianticelle del prato ve ne sono di quelle sofferenti per le particolari condizioni del suolo, dell'annata, dell'esposizione, ecc., che rimangono per tutto il tempo soffocate dalle altre, incapaci di fiorire, a mala pena in vita. Esse possono paragonarsi a quelle attitudini che non raggiungono la norma rispetto alla massa, che figurano fra le anomalie per difetto, nel significato che a questa espressione si dà in statistica a proposito della distribuzione delle frequenze di un carattere in una collettività omogenea e numerosa.

Con riferimento a queste attitudini insufficientemente sviluppate ed alla funzione del medico nel campo dell'orientamento è entrato nell'uso il parlare di attitudini negative; cosa che io trovo quanto mai impropria. Per quanto vasta sia la mia pratica nel campo dell'orientamento, mai infatti mi è accaduto di imbattermi in simile sorta di attitudini negative! Nè posso in alcun modo raffigurarmi un'intelligenza o un qualsiasi altro tratto della personalità che passi, come la colonna di mercurio di un termometro nel tratto delle gradazioni della scala al disotto dello zero! Potremo invece trovarci di fronte ad attitudini deficienti od a forme di inettitudine, cioè di mancanza di attitudine. Od ancora potremo segnalare l'esistenza di un gruppo di attitudini antagoniste

che si annullano reciprocamente. Possono riscontrarsi infine attitudini non desiderabili, antisociali, come quelle criminali. In nessun caso tuttavia si danno attitudini negative; nemmeno quando si entra in pieno nella patologia!

8) SULLA QUESTIONE DELLE ATTITUDINI ACQUISITE.

Sarebbe un riportarci nel campo delle pure astrazioni supporre l'esistenza di un fascio di attitudini separate nell'unità della persona. Conviene invece tener sempre presente che le attitudini si rivelano nel fare e che, anche nella più semplice forma dell'agire umano, si rispecchia tutta intera la personalità. In un singolo individuo potranno avere maggiore rilievo una attitudine o alcune attitudini prevalenti; e in ogni singola azione prevarranno, a seconda dei casi, or l'una or l'altra attitudine, od ancora un gruppo di attitudini.

Così considerate le attitudini, si prospetta la necessità di ammettere intime correlazioni fra le strutture e fra i dinamismi attitudinali della persona. Alcune attitudini sono state a questo riguardo considerate come aventi un carattere generale, sì da formare dei fattori che esercitano la loro influenza sulle altre. Fra queste vi sono appunto quelle che si dicono attitudini del carattere, della volontà, dell'intelligenza.

Ogni conoscitore di uomini, come ogni educatore, è benedotto dalla sua esperienza quotidiana che un'attitudine specifica, anche di grado elevato, non basta per la buona riuscita di chi la possiede se non è sorretta dalla volontà e dal carattere; cioè da altre forme attitudinali. Solo così può spiegarsi lo scomparire nell'aurea mediocrità di tante individualità annunciate come promettenti alla loro alba. Come stelle cadenti si presentano per un istante e poi scompaiono molti fanciulli prodigio! « Volere è potere! »: questa è la formula magica

forgiata da esperienze millenarie, che guida il giovane alla vittoria! Le attitudini della volontà e del carattere sono infatti da considerare quali le preminenti valorizzatrici delle altre attitudini, poichè in infiniti modi possono favorire le combinazioni, il potenziamento, le sublimazioni, i compensi, i sovracompenzi, le trasformazioni, le repressioni di quelle non desiderabili.

Ed è appunto pensando alla mirabile potenza dei fattori del carattere e della volontà, capaci di dare nuove strutture, nuovi aspetti alla personalità, che alcuni, anche fra gli psicologi più eminenti, hanno parlato, oltrechè di attitudini innate, anche di attitudini acquisite.

E' una questione che merita tutta la nostra attenzione. Essa è stata ampiamente trattata da Decroly e dal nostro Corberi al 3° Convegno internazionale di Orientamento professionale, che fu tenuto nel 1922 a Milano. Seguendo i giovani nel loro sviluppo e nel loro adattamento alle esigenze della scuola e della vita noi li vediamo trasformarsi meravigliosamente, fino a rendersi capaci di fare, in molti campi diversi, cose che prima erano assai difficili a prevedersi come loro possibili!

Anche escludendo quei fattori interni che agiscono potentemente nel periodo della metamorfosi del temperamento, del carattere, dell'affettività, cui si assiste nel periodo puberale, la scuola, le prove della vita, i bisogni, gli interessi collaborano a quella trasformazione che si attua attraverso gli anni sotto gli occhi dei parenti e degli educatori. Questi fattori, singolarmente o a gruppo, costituiscono a volte l'incentivo per il rivelarsi occasionale di attitudini, che altrimenti sarebbero rimaste nascoste.

Abbiamo a Roma uno scultore cieco: il Masuelli. Una ferita durante la grande guerra lo ha privato della vista. Prima della cecità egli non si era mai occupato di cose d'arte.

Solo 14 anni dopo esser divenuto cieco egli incominciò con fervore ad applicarsi alla scultura; e le fisionomie femminili, che egli sa con mirabile maestria creare nel suo buio studio sono illuminate da delicate espressioni, soffuse di melancolia. Possiamo noi chiamare questa sua arte il frutto di una attitudine acquisita? Non lo credo, per le esperienze raccolte sulle scarse capacità alle arti plastiche dei ciechi in genere. No; anche qui, a parer mio, si tratta di un'attitudine congenita latente. Acquisito potrebbe invece dirsi il cosiddetto « senso dell'ostacolo » nei ciechi ed anche, in gran parte, la loro capacità ad orientarsi tattilmente nello spazio.

Ugualmente acquisite devono dirsi tutte quelle possibilità a fare concretamente qualcosa di specifico, che si sviluppano nei giovani sotto l'influenza dei fattori educativi.

9) LE CAPACITÀ QUALI RISULTATO CONCRETO DELL'ORGANIZZAZIONE DELLE ATTITUDINI NATURALI.

Giunti a questo punto noi possiamo anche domandarci se sia esatto parlare ancora di attitudini acquisite o se meglio non convenga qualche altro termine che serva a distinguere efficacemente il gruppo delle cosiddette attitudini acquisite da quelle innate, ereditarie.

I raffronti, se non servono a spiegare, a volte possono aiutarci a comprendere meglio certi aspetti dei problemi. Spesso io ho pensato alle attitudini umane come a qualcosa di simile alle schiere dei pezzi che intervengono nel gioco degli scacchi. Molti di questi hanno caratteristiche speciali di azione, che li differenziano nei confronti degli altri. Ciascuno di essi, e in questo può vedersi la somiglianza con le attitudini, esercita una sua specifica influenza nello sviluppo dell'azione di gioco. Durante questo uno dei giocatori può perdere alcuni

dei suoi mezzi di difesa e di attacco. Con ciò egli non ha ancora perduta la partita: potrà ancora vincerla se saprà organizzare con i restanti la difesa del suo re e sviluppare l'offensiva supplendo a quelli che sono venuti a mancargli con l'azione combinata di altri. Se il giocatore riesce a tanto egli dimostra di essersi adattato alle nuove situazioni caratterizzate da specifiche singole inferiorità con un'abile adeguata coordinazione e organizzazione nell'azione.

Qualcosa di simile accade nella vita individuale con l'organizzazione delle attitudini che natura ha dato al singolo individuo e che gli rimangono dopo traumi o malattie. Io ho conosciuto a La Spezia un giovane mutilato di entrambe le braccia, che faceva lo scrivano in un pubblico ufficio, nei tempi in cui non v'erano ancora le macchine da scrivere, usando la penna con la bocca.

Chi di noi può dimenticare la figura di Enrico Toti, che diede luce di nuova gloria al corpo dei veloci bersaglieri ciclisti, egli, privo come era, di una gamba? Chi in psicologia ignora la dottrina dell'Adler, per la quale dal complesso di inferiorità l'individuo trae la spinta a compensi ed a sovra-compensi di eventuali deficienze?

Il risultato di tali organizzazioni delle forze dello spirito ai fini dell'operare io non chiamo più con il nome di attitudine ma bensì, e mi sembra assai più acconciamente, con quello di capacità.

Come ho già ricordato anche il termine di capacità è stato impiegato in molteplici significati, persino anche nel senso di potenza o di facoltà naturale della mente, con la tendenza tuttavia a scorgere in esso qualche cosa che esprime sintesi e vicinanza alla concreta realtà pratica. Nel complesso ha prevalso nella storia del pensiero la tendenza a comprendere come capacità l'acquisizione dell'adeguamento di un'attività ad un fine attraverso l'esercizio.

Trovo raccolta nei miei appunti, senza saperne precisare la fonte, la seguente annotazione: « *Le capacità sono il più spesso l'espressione del concretarsi nella pratica attività della sintesi di varie attitudini potenziata dai fattori della volontà, del carattere, dell'esercizio, dell'educazione ai fini dell'adempimento di particolari compiti* ».

Due colleghi belgi, i già ricordati Sollier e Drabs, commentano il concetto di capacità nel modo seguente: « Si può pressochè dire che la capacità è l'opposto dell'attitudine. Quest'ultima è anteriore o contemporanea al primo lavoro; quella invece è il risultato di tutti gli esercizi anteriori. La capacità è dunque necessariamente acquisita; ed è per mezzo dell'esercizio che si acquisisce, e attraverso l'avviamento che si perfeziona. Il suo valore non è nell'avvenire problematico ma nella certezza presente. Non è una virtualità ma uno stato che tende ad una stabilizzazione che ne segna il limite, seguita più tardi dal declinare. Essa è essenzialmente misurabile; e la sua misura pratica è il rendimento quantitativo o qualitativo del lavoro. La sua misura esprime il valore professionale del lavoratore; mentre l'attitudine si valuta, per quanto ciò è possibile, in un modo assai relativo o per raffronti. L'attitudine si presenta nella più grande varietà di forme e d'applicazione; la capacità è omogenea. Essa risulta data da una organizzazione funzionale sempre più stretta e stabile, contrariamente a quella dell'attitudine che resta soggetta, durante tutta l'evoluzione dell'individuo, a cambiamenti ed a sostituzioni ».

« Se il grado dell'attitudine è d'ordine quantitativo, quello della capacità è d'ordine qualitativo, viene cioè fornito dalla perfezione più o meno grande acquisita nel lavoro ».

In modo più sintetico il nostro Tommaseo ci pone di fronte a una interpretazione simile raffrontando i termini di attitudine e di abilità.

Scrivono il Tommaseo: « la disposizione è la prima cagione dell'agevolezza a fare; l'inclinazione fa che l'uomo prenda piacere a quel che fa o a quel che ha. Attitudine è disposizione talvolta lontana; abilità è potenza di fare più prossima. Può l'uomo esser atto da natura e non abile per difetto di esperienza o di studio o per sopravvenutogli impedimento. Anche i naturalmente non atti a forza di esercizio vanno acquistando una qualche abilità ».

E poichè il concetto di abilità tende oggi a rientrare in quello più vasto di capacità, il Tommaseo appare pienamente con noi. La caratteristica che pone la capacità sotto l'influenza dei fattori dell'educazione è squisitamente indicato da lui per distinguere l'attitudine da essa.

Così inteso il concetto di capacità si presta inoltre a indicare la meravigliosa sfera delle influenze dell'ambiente su ciò che è dote nostra naturale. Il fattore educativo, sia questo messo in atto dalla famiglia, dalla scuola, dall'azienda, dalla società, acquista il potere di formare e trasformare, secondo particolari indirizzi, la mentalità del giovane.

L'educatore può ottenere — se sa farlo — cose meravigliose anche dai meno adatti, tanto sono estesi i confini delle supplenze, delle vicarianze, delle organizzazioni possibili nel campo dei dinamismi della persona umana sotto l'influenza della volontà indirizzata verso determinate finalità.

Alcuni anni or sono, quando ancora non si parlava di Carta della Scuola, in collaborazione con un insigne pioniere degli studi dell'orientamento scolastico, l'Ing. Enrico Gatti, io ho studiato nelle officine del grande Istituto industriale Omar di Novara il progressivo costituirsi di capacità al lavoro nei giovani allievi attraverso le esercitazioni dell'anno scolastico, prescritte dai programmi d'allora per le scuole di avviamento.

Fin da allora noi abbiamo propugnato che lo studio delle

attitudini professionali dovesse farsi, come noi tentavamo, nell'officina scolastica. Nei vari esercizi prescritti noi infatti sin da allora riconoscemmo sottesi complessi attitudinali diversi e distinti, che insieme sono messi in atto nella formazione delle capacità. Constatammo inoltre in base alle nostre esperienze che assai raramente un allievo si dimostrava uniformemente forte o debole nei saggi delle varie capacità sondate. E ne concludevamo che da questo trovarsi lo stesso individuo in diverse posizioni di rango a seconda delle prove nasceva la possibilità della costituzione di profili individuali, i quali, precisando il grado col quale si manifesta la capacità nelle particolari operazioni, avrebbero potuto consentire, quando i profili fossero resi più completi, l'espletamento del compito d'orientamento.

L'osservazione analitica e precisa degli effetti del ripetersi delle prove ci permise allora anche di rilevare altri fatti sorprendenti: e cioè il più rilevante miglioramento a fin d'anno dei giovani che all'inizio di esso erano apparsi i più debolmente dotati.

Lascio qui da parte l'interpretazione nostra di questa constatazione nel campo dottrinale. Sia essa, o pur no, valida dal punto di vista pratico essa ci apparve di grande importanza nei confronti dell'opera di orientamento professionale. Questa opera infatti, ebbi a dichiarare, non si propone di rintracciare i più atti alle diverse professioni, ma semplicemente quelli che sono idonei ad esse. Ora l'esercizio fa passare nel campo di questi ultimi un forte gruppo di quelli che in prima istanza potevano essere apparsi o insufficienti o a malapena sufficienti.

Tuttavia, continuavo, per quanto esista realmente la tendenza verso un livellamento fra i membri di una collettività che lavorino a lungo nelle stesse condizioni, essa non deve venire accolta con criteri troppo semplicisti, perchè non solo

consente ancora il mantenersi di rilevanti dislivelli, ma anche singole accentuazioni di questi ultimi.

Ed aggiungevo che mentre coloro che risultano sin dall'inizio ottimi in una determinata capacità devono disporre di un'attitudine innata, che può avere tale forza da riflettersi in particolari capacità professionali anche senza l'influenza benefica della scuola, quest'ultima è indispensabile per mettere in valore i germi attitudinali presenti in grado più tenue in molti altri.

Può quindi benissimo dirsi, in questo senso, che la scuola orienta in quanto forma e trasforma la mentalità dei giovani secondo gl'indirizzi che essa alle menti imprime. Non è da oggi ma da secoli che sappiamo che le scuole di matematica formano dei matematici; quelle di arte, degli artisti; le scuole di marina, dei marinai, ecc.! Nessuno può infatti sottrarsi all'azione formatrice e trasformatrice della scuola in quanto essa organizza delle capacità in chi prima non le possedeva.

10) LA FORMAZIONE DELLE CAPACITÀ PER VIRTÙ DELL'EDUCATORE.

In questo senso ancora noi ci sentiamo pieni di simpatia verso le dottrine behavioristiche americane le quali ritengono che pressochè tutto nel comportamento dell'essere vivente è effetto dell'azione dell'ambiente. Questa concezione è suscitatrice di un profondo ottimismo. Essa ci riconferma nella nostra antica fede espressa dal detto latino: « *Nemo desperandus est!* ». Ce ne scostiamo solo in quanto non possiamo sfuggire interamente alla imponenza dei fatti dell'ereditarietà.

Avendo presente questa riserva, noi possiamo credere che un ottimo educatore possa anche riuscire a trasformare

in musicista un amusicale, ma restiamo del pari convinti che sia pur sempre più facile far diventare musicista di maggior valore chi per natura dispone di un certo numero di attitudini, cioè di predisposizioni all'attività artistica musicale.

In questo campo gli ammaestramenti della pratica sono quotidiani. La vita di continuo ci insegna che un giovane può essere reso capace di attendere a certe occupazioni ma, ciò nonostante, rimanere non adatto per natura a quelle stesse mansioni di lavoro. Altre volte invece la vita ci pone di fronte a uomini che natura avrebbe creati adatti a certi posti, ma che sono incapaci ad essi perchè l'indirizzo scolastico, l'ambiente educativo, o altre circostanze, non hanno permesso di trasformare in capacità le attitudini esistenti in costoro, che, trascurate sono regredite o sono state addirittura represses.

Queste stesse cose, che, come si vede, sono oggi ancora oggetto di dibattito nel campo della psicologia e della pedagogia, sono state accolte senz'altro quali evidenze indiscusse, e da gran tempo, in altri settori dell'attività umana; per esempio nel campo sportivo.

Nelle varie forme dell'atletica e dello sport solo sulla base del riconoscimento di specifiche attitudini naturali si scelgono e si preparano i futuri dominatori. Non si allenano in uno sport coloro che non vi sono adatti. Solo gli adatti per natura vengono trasformati in atleti capaci.

Un buon maestro è riconosciuto necessario per potenziare al massimo chi ha le doti attitudinali per un dato sport. Il maestro orienta, avvia, forma quel futuro atleta nel quale siano state riconosciute precocemente le attitudini a divenirlo.

Pochi mesi or sono l'Italia ha perduto un suo grande campione olimpionico nella scherma: Nedo Nadi! Di lui abbiamo appreso che, figlio di un valente maestro di scher-

ma, del padre ereditò le attitudini; e che fu il padre stesso, il quale per tempo, con il suo insegnamento, le potenziò trasformandole in capacità così perfette da fare del figlio un campione mondiale nell'arte della scherma.

Si dimostra perciò cieco nel campo scolastico e del lavoro quell'educatore che pensi di fondare la sua opera considerando le menti dei giovani come una massa spiritualmente omogenea suscettibile di uno sviluppo uniforme. Quell'educatore si dimostra anche sordo alla voce della pratica che ammaestra che la massa degli insufficienti, degli appena sufficienti, dei mediocri non è costituita solo da elementi nei quali predomini il mal volere, il disinteresse, la mancanza di applicazione. Vi sono, è vero, anche gli insofferenti al servizio scolastico, ma la maggioranza degli appena sufficienti e dei mediocri è costituita da giovani che sono indirizzati per vie per le quali non hanno disposizione e nei quali nessuno ha considerato le attitudini naturali.

Anche ammettendo che un educatore abilissimo possenga il talento di trasformare colui che non ha attitudini per certi indirizzi di scuola in uno scolaro buono, si deve ritenere che l'educatore non compie con ciò un miracolo, poichè è noto che la natura umana è capace di adattamenti meravigliosi e vari sotto l'assillo della necessità e sotto lo sforzo volitivo.

In molti casi di giovani che sono stati indirizzati per vie loro non conformi per natura conviene inoltre meditare se il risultato ottenuto attraverso sforzi enormi sia qualcosa che meriti questi ultimi. Non è bene tenere continuamente tesa la corda di un arco! E' antieconomico mantenere di continuo una macchina in regime di sforzo! Tante tristi cose può ricordare qui agli educatori l'igiene mentale, conseguenze delle violazioni dei diritti e delle preferenze dettate da natura!

Non convengono mai gli adattamenti forzati perchè non

sono utili e possono essere dannosi per il giovane e per la società.

In una stessa individualità non si ha una sola ma molteplici attitudini! Se non adatto alla natura di un giovane appare un indirizzo di studio o di lavoro, vi sono certo altre vie più conformi alla sua personalità.

Non parla la stessa Carta della Scuola della necessità di un principio di selezione, il quale in fondo non mira ad allontanare dei giovani dalla scuola in genere ma ad indirizzarli per ordini di scuola più adatti alla loro natura? Non lamentiamo noi oggi la soverchia affluenza di scolari in certi tipi di scuola per l'inosservanza del principio delle naturali differenze fra uomo e uomo? Non stiamo noi di continuo affermando che particolari pregiudizi di casta, in contrasto con lo stesso principio facciano poco frequentate molte scuole tecniche?

Troppo pochi progressi a questo riguardo mi sembra siano stati fatti da quando il Poeta nostro, corrucciato, ammoniva:

*« Oh! se il mondo laggiù ponesse mente
Al fondamento che natura pone,
Seguendo lui, avria buona la gente.
Ma voi torcete alla religione
Tal che fia nato a cingersi la spada
E fate re di tal ch'è da sermone;
Onde la traccia vostra è fuor di strada ».*

Anche riconoscendo l'imponente azione della scuola nel formare e nel trasformare la mentalità del giovane, conviene che l'educatore più che mai abbia presente nello svolgimento della sua opera quanto la Carta della Scuola precisa, che cioè i giovani debbono essere valutati in base e alle loro attitudini e alle loro capacità: e che, capacità e attitudini de-

vono essere mantenute distinte per una migliore comprensione ed una più efficace attuazione dell'opera di orientamento.

Tutto ciò potrà un giorno venir riconosciuto anche meglio dagli educatori che opereranno in quella scuola ideale sognata da tanti grandi pedagogisti, ma dovrà intanto essere messo in atto, nei limiti del possibile, dalla scuola di oggi. L'educatore di oggi mai deve scordare sin da ora nella sua nobilissima missione che egli non crea le attitudini nei giovani: egli deve aver sempre presente che la sua indefessa meravigliosa opera si svolge trasformando in forme varie di capacità i doni che la natura divina ed eterna a nessuno nega completamente, ma che elargisce in misura, e in forma diversa, a ciascuno di noi.



Corporate Heritage
& Historical Archive

L'AUTARCHIA IN PRODOTTI TROPICALI

SANTI FLORIDIA

I. — L'AUTARCHIA.

1. *L'autarchia economica.* — « Autarchia » è indipendenza; e quale indipendenza, se può essere politica, economica, culturale, ecc., è soprattutto economica ⁽¹⁾: perchè, come la vita politica e la vita culturale, non potendo svolgersi senza mezzi, sono legate alla vita economica, così anche all'indipendenza economica sono legate l'indipendenza politica, quella culturale, ecc.

Poichè l'economia è adeguamento di bisogni e di mezzi, l'autarchia economica può realizzarsi: o adeguando i bisogni ai mezzi disponibili, col contentarsi del poco, ridurre i bisogni e minimizzare i beni posseduti; o adeguando i mezzi ai bisogni, col provvedersi dei beni occorrenti ai bisogni di mantenimento e di svolgimento della vita. La scelta dipende dalle capacità produttive, che — tanto per gli individui, quanto per gli stati — sono il fulcro risolutivo di ogni problema economico ⁽²⁾.

⁽¹⁾ Ἀὐτάρχεια: sufficienza di sè (il bastare a sè stesso).

⁽²⁾ Per queste considerazioni cfr. FLORIDIA S., *La vita economica dei popoli*; vol. I, Prolegomeni, dei « Fondamenti di Storia Economica » (Messina, D'Anna, 1940).

Negli stati aventi scarse capacità produttive l'autarchia si realizza soprattutto con la limitazione dei bisogni e con la restrizione dei consumi: la quale, se riguarda i così detti beni voluttuari, può essere una virtù di sobrietà e di temperanza; ma se riguarda i beni di mantenimento della vita può essere causa di depauperamento delle forze vitali (poichè per gli immanenti bisogni fisiologici stringere la cintola non si può oltre un limite, pena la vita stessa), e può costringere al servilismo, e condurre in servitù.

Negli stati di elevate capacità produttive — i quali per essere sostenuti da superiori forze intellettive, organizzative e potenziatrici, sono autocrati per indole e per educazione — l'autarchia è una esigenza di vita; ed è realizzata, non con la limitazione dei bisogni vitali — che sarebbe mortificazione dello spirito e del corpo, e prodromo di servitù — ma con l'acquisto delle fonti produttrici di tutti i beni occorrenti allo integrale svolgimento delle proprie forze. Tale acquisto avviene, secondo le contingenze dei luoghi e dei tempi, con mezzi pacifici, o con mezzi violenti: o intensificando la produttività dei propri spazi vitali; o estendendone la superficie con la conquista di nuovi spazi vitali; e, in ogni caso, esaltando le capacità di lavoro, di organizzazione, e di potenziamento della nazione.

Questa realizzazione autarchica è la sola forma, che dà una autarchia attiva: la vera autarchia economica. Ma è una realizzazione difficile ad attuarsi in pieno, perchè, ove risponde ad un bisogno immanente, è un bisogno crescente, e via via sempre più complesso; e genera un travaglio senza soste.

E' un bisogno immanente per i popoli superiori, dotati di prorompenti forze vitali, e sostenuti da una inesausta volontà di vivere, di perpetuarsi, e di progredire. Volendo essere sulla scena del mondo attori, e non semplici spetta-

tori, la loro vita è necessariamente inquadrata nella lotta della coesistenza spaziale dei popoli; e deve, quindi, avere sempre in atto la disponibilità dei mezzi necessari a superare gli eventi di oggi e di domani.

L'autarchia è per essi un bisogno crescente: perchè — per il continuo aumento numerico del genere umano, e per la conseguente riduzione della disponibilità degli spazi vitali della Terra — la lotta fra gli stati si fa sempre più vasta e più agguerrita; onde per ogni stato la possibilità di essere travolto è maggiore; e, quindi, più vivo e più acuto è in essi il bisogno della piena indipendenza economica.

Ed è un bisogno via via più complesso: perchè, per le maggiori tutele della vita umana, in ogni stato evoluto la popolazione aumenta continuamente di numero e migliora nel tenore di vita; onde la massa dei beni necessari aumenta col numero degli individui, e aumenta con le crescenti comodità della vita. E perchè i sempre più estesi e più intimi contatti con popoli di costumi e di civiltà diverse — per i naturali scambi di idee, di usi e di merci — danno origine a nuovi bisogni, e, quindi, alla necessità di disporre di nuovi prodotti; i quali, anche quando sono accolti come rari o voluttuari, finiscono — perchè l'uso crea l'abitudine — per diventarvi comuni, necessari e indispensabili.

Da questi fatti consegue che, in ogni tempo, per gli stati più evoluti e in crescita l'autarchia è un travaglio senza soste: più che una conquista, che appaghi e dia requie, è un tormento, che esalta — e spesso esaspera — le capacità produttive, tese a impedire che la autosufficienza di ieri diventi la temuta insufficienza di domani.

2. *Antica e moderna autarchia.* — La tendenza alla autarchia è di tutti i tempi: i princìpi direttivi di una accorta po-

litica autarchica furono formulati, ventidue secoli addietro, dalla sapienza di Aristotele (3).

Se l'aspirazione all'autarchia e i principi di politica autarchica sono nell'epoca storica in nulla o di poco mutati, la realizzazione dell'autarchia presenta, però, condizioni molto diverse dai tempi antichi ai tempi moderni; e ciò perchè la vita dei popoli, col volgere dei secoli, diventa per ogni popolo più complessa, e per tutti più interdipendente.

Nei tempi antichi e medioevali l'autarchia era un bisogno strettamente economico, e precipuamente alimentare: in quanto, essendo scarse la potenza e la sicurezza dei mezzi di trasporto, e ristretta l'area del commercio internazionale, e prevalente lo isolamento dei popoli — per cui le carestie erano flagelli temuti e ricorrenti; e le economie statali erano prevalentemente chiuse — il bastare a sè stessi era una necessità, spesso dura, che dava il maggior travaglio alle annone.

Nei tempi moderni, con l'affermarsi dei principi di utilità degli scambi e di libertà del commercio — resi possibili da più capaci, più celeri e più sicuri mezzi di trasporto; e da una maggiore fiducia nei rapporti interstatali — l'autarchia è un bisogno generalmente di prestigio e di potenza, e una previggenza degli stati in ascesa; e diventa bisogno di autodifesa solo nei periodi di crisi internazionali, che spingono gli stati a richiudersi ognuno in sè stesso.

Nei tempi antichi e medioevali il problema dell'autarchia era più diffuso, più duro, ma più semplice; mentre nei tempi moderni — e nei contemporanei, soprattutto — è un problema meno diffuso, ma più complesso.

Per gli stati dell'Europa antica, per esempio, era meno complesso, che per gli stati dell'Europa moderna: perchè

(3) ARISTOTELE, *Politica*, libr. VII, 4 e segg.

quelli avevano una popolazione cinque o dieci volte minore, che gli attuali; perchè avevano più vaste disponibilità di spazi vitali, in una minore concorrenza internazionale; e perchè non conoscevano tanti dei prodotti industriali, necessari alle moderne economie di pace e di guerra. In particolare, di prodotti esotici conobbero poche « spezie » (come il pepe, la cannella, l'incenso, ecc.), e quali generi voluttuari di alto prezzo, e accessibili a pochi fortunati; mentre per gli odierni stati dell'Europa sono prodotti esotici, anzitutto, alcune materie prime fondamentali per la vita economica (come il cotone, il caucciù, i semi oleosi, i legni da ebanisteria, ecc.); ed anche numerosi generi di godimento, dei quali i nervini (come lo zucchero, il caffè, il cacao, il the, ecc.) nella affaticante vita moderna sono entrati largamente nel consumo delle masse popolari, e non sono ritenuti tanto voluttuari, come un secolo addietro parvero, ed erano.

Pertanto, mentre per gli stati antichi e medioevali dell'Europa l'autarchia era autosufficienza in prodotti locali e regionali; per gli stati moderni, invece, oltre che autosufficienza in prodotti delle proprie regioni, è anche autosufficienza in prodotti di regioni, aventi climi e flore diverse, da quelle delle proprie regioni. Per gli stati delle regioni temperate — come tutti gli stati dell'Europa — il problema autarchico si scinde, pertanto, in due branche, diverse e fondamentali: l'autarchia in prodotti di climi temperati; e l'autarchia in prodotti di climi intertropicali.

II. — L'AUTARCHIA IN PRODOTTI TROPICALI.

1. *Nei tempi antichi.* — Nella storia dell'Europa l'uso di prodotti esotici, in genere, e di prodotti tropicali, in specie, diventò un fatto di interesse commerciale nell'epoca dell'Impero Romano; e, soprattutto, in quei due secoli, fecondi

di lavoro e di benessere, che vanno da Augusto a Marco Aurelio, sotto i quali la « pax romana » regnò sovrana e benefica, allacciando in un'intensa rete di traffici mercantili l'Occidente e l'Oriente, dalla Britannia al Sudan, e dalle sponde orientali dell'Atlantico alle rive del Golfo Persico.

L'Oriente (costituito allora essenzialmente dai paesi fra l'India e il Mediterraneo orientale), con i suoi misteri e le sue favolose ricchezze, era stato veramente scoperto all'Europa dalla ardita e travolgente spedizione di Alessandro Magno, compiuta nella seconda metà del IV secolo av. Cr. Da allora — come, fra gli altri, attestano i ricordi nelle opere di Aristotele e di Teofrasto, prima, e di Strabone e di Dioscoride, più tardi (4) — si iniziò una corrente importatrice di prodotti esotici, e tropicali, in ispecie, dai paesi dell'Oriente a quelli del Mediterraneo. Tale corrente si affermò sotto l'Impero Romano, il solo che nell'antichità poteva effettuarla: perchè sotto un unico « imperium » univa l'Occidente e l'Oriente; e perchè, per le ricchezze accumulate, era — con Roma, « caput mundi »; e centro di convergenza dei tributi delle province; e miraggio di attrazione della vecchia e nuova nobiltà dei tre continenti, che si affacciavano al Mediterraneo — il solo mercato importatore di generi di godimento d'alto prezzo.

Si importavano dall'India bdellio, calamo aromatico, cancamo, cannella, costo, garofano aromatico, mace, mastice, nardo, pepe, sàccaro, ecc.; dalla Media e dalla Persia cedro, cotone, pistacchio; dall'Arabia cardamomo, cassia, incenso, mirabolano, mirra, zenzero, ecc.; dall'Etiopia ammoniaco, ebano, ecc. Queste merci partivano da Barygaza (a nord di Bombay) e da Carax (Caraci), nell'India, per

(4) ARISTOTELE specialmente negli scritti di Fisica e di Storia Naturale; TEOPFRASTO nella *Perì fytón istoria*; STRABONE nella *Geographia*; e DIOSCORIDE nella *Medica materia*.

via mare sino al Mar Rosso; e da Saba e da Petra, nell'Arabia, per vie carovaniere, a Gaza, nella Palestina, e a Myos Hormos e a Berenice, lungo le coste del Mar Rosso, e sino a Koptos, sul Nilo; per accentrarsi, in massima parte, ad Alessandria, donde i servizi marittimi portavano queste merci preziose soprattutto a Pozzuoli, avamposto di Roma, e a Ostia, porto di Roma.

Erano prodotti voluttuari, usati come stimolanti, come aromi, come condimenti, come profumi; o usati come prodotti medicinali, in « specialità » farmaceutiche ritenute di poteri miracolosi; o usati come prodotti per sacrifici divini, o per riti funerari, in culti esotici, o alla moda orientale. Ristretto ne era, pertanto, il consumo; e ristretto ed aleatorio il commercio.

Un'autarchia per questi prodotti non fu, pertanto, sentita nei tempi antichi, se non in via eccezionale. E ciò si avverò, non come bisogno di europei; ma come bisogno di asiatici, immigrati in Europa; e per qualche prodotto, il cui uso era d'importanza rituale. Tale fu il caso degli Ebrei, per il *cedro*. Essi — dovendo, per disposizione del Levitico, portare al tempio, nella Festa dei Tabernacoli, frutti di cedro e rami di palme — via via che si propagarono, o che furono dispersi, per il Mediterraneo, introdussero la coltivazione di questo agrume nei paesi, in cui le loro comunità erano più numerose, e le condizioni climatiche più favorevoli ⁽⁵⁾. La cultura del cedro nell'Italia Meridionale e in Sicilia — e, come già prima, nella Palestina e nell'Egitto — fu introdotta, pertanto, dagli Ebrei, in funzione autarchica dei loro interessi. E se si risale a tempi più antichi, per identiche ragioni autarchiche, fu — come pare verosimile

⁽⁵⁾ Cfr. FLORIDIA S., *Storia degli agrumi*, dal XVI sec. av. Cr. ai nostri giorni; Messina, 1940.

— introdotta in Sicilia la cultura del *carrubo* dai Fenici, e forse anche dagli stessi Ebrei (6); e probabilmente anche quella del *croco* e del *sommacco*, dai Greci.

2. *Nei tempi medioevali.* — Nell'alto Medioevo — che se fu barbarico o romano-barbarico nell'Europa centrale, fu, invece, permeato di influssi orientali, greci e semitici, nell'Europa meridionale — l'importazione dei prodotti tropicali in Europa, dopo il fatale ristagno, conseguente allo sfaldamento dell'Impero Romano, riprese vita con la formazione dell'Impero Musulmano, che riprodusse, in parte, la vicenda imperiale romana, collegando l'Oriente all'Occidente: dall'Arabia alla Persia, e dall'Arabia all'Africa settentrionale, alla Sicilia, e alla Spagna.

Gli Arabi, abili mercanti, ebbero convenienza di ripristinare le correnti del traffico dei prodotti esotici, già affermatesi nei tempi antichi; ma, soprattutto — quale popolo orientale di razza e di costumi, presto adusato ai prodotti tropicali — ebbero interesse di farli affluire, per il loro personale consumo, ovunque essi impiantavano stabili dimore. Ciò spiega la ripresa, che dall'VIII secolo, circa, ebbe il commercio dei prodotti tropicali nel Mediterraneo, per opera degli Arabi.

Ma gli Arabi — dalle condizioni climatiche dei loro paesi originari, e dai contatti con le esperienze agrarie e industriali della Persia, della Babilonia, e dell'Egitto, diventati maestri nell'agricoltura irrigua, e pionieri della scienza chimica moderna — trovarono possibile, e conveniente, introdurre, nelle più adatte regioni climato-botaniche rivierasche del Mediterraneo, la coltivazione delle specie tropicali, me-

(6) Cfr. FLORIDIA S., *Storia del carrubo*, dalle origini della coltura ai nostri giorni; Messina, 1940.

no esigenti, e più redditizie in prodotti non soltanto voluttuari, ma anche d'uso comune: quale, per esempio, il cotone.

Ragioni autarchiche, oltre che convenienza commerciale, sollecitarono, pertanto, gli Arabi a propagare, o a intensificare, culture di specie tropicali nei paesi del Levante, nell'Africa settentrionale, nella Spagna, e, soprattutto, in Sicilia. E di ciò non mancano precisi ricordi storici, nella stessa letteratura araba (7), e nella terminologia araba, passata, per tramite della Sicilia e della Spagna, nelle lingue europee: come per il limone (« limûn »), l'arancio (« narângi »), il carrubo (« carrûb »), il pistacchio vero, o fastuca (« fistûk »), il banano, o musa (« mûs »), il cotone (« cutûn »), il sommacco (« summâk »), lo zafferano (« zafrân »), il riso (« rûs »), la canna da zucchero (« zûkr »).

Di tutte queste piante — originarie di regioni prossime ai tropici — gli Arabi incrementarono, o introdussero, la cultura e gli usi, alimentari e industriali, nei paesi del Mediterraneo, in genere, e nella Sicilia, in particolare: la quale esaltò, così, la potenza produttiva delle sue terre e del suo clima; e avvivò nuove industrie e nuovi commerci e nuovi usi nei paesi europei e mediterranei.

Con la dominazione araba, e nel precipuo interesse degli Arabi, l'autarchia in prodotti tropicali si affacciò, quindi, complessa nel Mediterraneo; e, nei riguardi dell'Italia, ebbe rapido sviluppo in Sicilia.

Quando, durante il basso Medioevo, dalle vicende dei tempi si iniziò la grande primavera italica, con la vigorosa rinascita della nostra stirpe, l'iniziativa araba trovò una continuità nei territori delle nostre repubbliche marinare, a Ge-

(7) Come nel *Kitab al Felahah* di IBN AL AWAM (edito da J. J. Clément-Mullet; Paris, 1865-67); e come nel *Nuzhat* di IDRIS (edito da A. Jaubert; Paris, 1837-39).

nova, a Pisa, ad Amalfi, a Venezia, e altrove; e lungo le feraci pianure costiere dell'Italia meridionale e della Sicilia, unificate nella gloriosa Monarchia Normanna.

Così, l'autarchia in prodotti tropicali, iniziata nel Mediterraneo dagli Ebrei e promossa dagli Arabi, si intensifica e si espande, per diventare un fenomeno prevalentemente europeo e moderno.

3. *Nei tempi moderni.* — a) Nei paesi dell'Europa i bisogni in prodotti tropicali diventano più vari e più complessi, e si affermano come un'esigenza autarchica, nei tempi moderni.

Ciò consegue, anzitutto, alle grandi scoperte geografiche, e alla diffusione dei moderni mezzi di trasporto, che hanno estesa e intensificata la rete dei rapporti e degli scambi fra i popoli della Terra; e hanno reso possibile il consumo dei prodotti di qualsiasi paese in qualsiasi altro paese del mondo. Consegue, inoltre, al generale elevamento del tenore di vita delle classi lavoratrici: le quali, oltre i mezzi di sussistenza, godono di varie comodità del vivere, mai prima avute, e forse mai prima sperate. E consegue, anche, ai progressi delle scienze applicate, che, come la Chimica e la Meccanica, hanno reso possibile e proficuo l'uso di nuove materie prime nella produzione di nuovi prodotti industriali.

Questi fatti sono di interesse eminentemente europeo, in quanto sono collegati: al progressivo potenziamento della vita, proprio delle superiori razze dell'Europa; al conseguente fenomeno di sovrappopolazione, più acuto in Europa, che altrove; e alla conseguente necessità per gli Europei di espandersi per il mondo, e, in particolare, nelle misteriose e straricche regioni intertropicali dell'Asia, dell'Africa e delle Americhe, per utilizzarne le molteplici e quasi intatte risorse naturali.

In queste regioni — per la prima volta scoperte, od esplorate — gli Europei conobbero, e trassero, nuovi prodotti esotici, i quali, a poco a poco, entrarono negli usi alimentari, voluttuari, o industriali, della vita europea. Tali il *the*, l'*arancio dolce* (detto « portogallo »), il *mandarino*, e l'*indaco*, originari dell'Asia meridionale; il *caffè*, originario dell'Africa orientale; e il *màis*, la *patata*, il *pomodoro*, il *tabacco*, il *cacao*, l'*aràchide*, il *fico d'India*, l'*àgave*, e le specie da caucciù, originari delle Americhe.

Di queste piante esotiche fu possibile acclimatare la patata e il tabacco in quasi tutte le regioni temperate dell'Europa; e il mais (o granoturco), il pomodoro, l'arachide, il fico d'India, l'agave, l'arancio dolce e il mandarino nelle regioni temperate-calde, mediterranee; ma per le specie più esigenti, quali il caffè, il the, il cacao, e le specie da caucciù, mancò, per la inattitudine del clima europeo, la possibilità, o la convenienza economica, di acclimatarle in qualsiasi regione dell'Europa.

D'altra parte, le vaste e feraci pianure temperate-calde e intertropicali delle Americhe, dell'Africa e dell'Asia, si dimostrarono presto ottimi ambienti climato-pedologici anche per la cultura delle specie esotiche, già utilizzate dai tempi medioevali, e ancor ristrettamente coltivate nelle più propizie pianure costiere del Mediterraneo: come il cotone e la canna da zucchero. E la cultura di queste, come anche del caffè e di altre, attecchì così bene nelle Americhe, che le piantagioni americane fecero presto concorrenza alle stesse culture, fiorenti da secoli nella Sicilia e nella Spagna, ove finirono per esserne stroncate.

b) La maggiore sicurezza nei mezzi di trasporto, lo ampliamento intercontinentale e interoceanico della rete degli scambi commerciali, i cresciuti agi della vita, e un prodigioso

l'aumento della popolazione resero i vecchi e nuovi prodotti tropicali generi di largo consumo, e, quindi, una esigenza sociale per gli stati dell'Europa, che erano, e sono, i più popolosi e più evoluti stati del mondo. In conseguenza, si impose a questi anche il problema dell'autarchia in prodotti tropicali; e a questa autarchia essi hanno provveduto, e provvedono, per più vie.

I più audaci e i più fortunati hanno provveduto col mezzo più radicale e più sicuro, per quanto violento e periglioso: con la conquista di territori intertropicali, produttori dei beni desiderati. E ciò ha portato alla conquista di colonie, e alla formazione di imperi coloniali, utilizzati — fra l'altro — come territori di culture tropicali, onde i prodotti tropicali hanno ricevuto il sinonimo di « prodotti coloniali ». E' noto, infatti, come — a parte gli sfruttamenti minerari — le colonie portoghesi, spagnuole, olandesi, e britanniche, nelle Americhe e nelle Indie asiatiche, si affermarono via via per le loro piantagioni di canna da zucchero, di cotone, di indaco, di caffè, di the, di specie da caucciù, ecc.

Altri hanno provveduto, e provvedono, con un mezzo pacifico: con l'acclimatazione delle specie tropicali nei propri territori. E ciò è stato possibile soltanto per gli stati aventi territori entro, o prossimi, ai tropici; come, in Europa, nei paesi rivieraschi del Mediterraneo, aventi clima temperato-caldo, e per le specie meno esigenti in energia solare e in umidità. Tale, per esempio, in Sicilia, la cultura della canna da zucchero e del cotone, eminenti nella produzione e nel commercio europeo e mediterraneo durante i secoli X-XVII.

Altri hanno provveduto, e provvedono, sostituendo al consumo dei prodotti tropicali il consumo di prodotti di specie similari, spontanee o coltivate nei propri territori; e in tal caso la sostituzione, o la eventuale sofisticazione (come

del caffè con la cicoria, o con l'orzo), riescono più o meno soddisfacenti.

Altri, infine, provvedono sostituendo i prodotti tropicali con prodotti industriali, chimicamente identici, o affini, a quelli; e tratti da materie prime disponibili nei propri territori. In tal caso, se la identità sostanziale e la convenienza economica del prodotto industriale sono raggiunte (come per lo zucchero tratto dalla barbabietola), la vittoria della Chimica sulla distribuzione geografica dei climi e delle flore è veramente autarchica.

c) Di questi vari mezzi, di cui gli stati europei si sono serviti, e si servono, per assicurarsi l'autosufficienza in prodotti tropicali, il mezzo naturale, radicale, e sicuramente autarchico, è quello di disporre di territori intertropicali, adeguati ai propri bisogni. E ciò è evidente per più ragioni.

Anzitutto, perchè i paesi dell'Europa centrale e settentrionale — dalla Gran Bretagna alla Germania e alla Russia — non hanno in Europa regioni temperate-calde, in cui poter acclimatare la gran parte delle specie tropicali.

Perchè i paesi dell'Europa mediterranea — dalla Spagna all'Italia e alla Grecia — se hanno regioni temperate-calde, in cui possono acclimatare specie tropicali, non hanno in tali regioni territori tanto estesi, da potervi produrre convenientemente i prodotti tropicali necessari ai loro complessi bisogni, e ai bisogni degli altri paesi europei.

Perchè nella gran parte dei paesi europei lo sviluppo delle scienze chimiche e l'attrezzatura industriale non sono in grado di produrre i prodotti sintetici, o comunque sostituibili, nelle qualità e nelle quantità occorrenti, ai prodotti tropicali, di cui essi hanno bisogno.

E perchè — quali che siano le loro condizioni climatiche, floristiche, e industriali — i paesi europei non sono in condi-

zioni di produrre — fuori di un campo puramente sperimentale — nè caffè, nè cacao, nè caucciù, nè altri prodotti di specie tropicali più esigenti; e non possono attuare una produzione in grande nè di cotone, nè di arachide, nè di sèsamo, nè di cocco o di altre palme.

In tempi, in cui i prodotti tropicali erano generi voluttuari o di lusso, e, quindi, di ristretto consumo, l'acclimatazione nelle regioni più propizie, la sofisticazione con sostituti, la sostituzione con prodotti sintetici, erano possibili e tollerabili. Ma tutti questi mezzi riescono inadeguati ai bisogni dell'odierna Europa, in cui i prodotti tropicali sono richiesti in grandi quantità e permanentemente: o come materie prime industriali, profondamente incardinate nella economia delle industrie e dei trasporti; o come generi di godimento, consumati nella vita fisiologica delle grandi masse delle popolazioni. Tale il *cotone*, re dei tessili, di consumo universale; tale il *caucciù*, una delle materie prime industriali di più larga applicazione, e indispensabile ai moderni mezzi di trasporto; tali gli *oli e grassi vegetali* di arachide, di sesamo, di sòia, di palme, indispensabili in molte industrie chimiche; e tali il *caffè*, il *cacao*, il *the*, nervini di uso generale e quotidiano.

III. — LA INTEGRAZIONE DEGLI SPAZI VITALI.

1. *Una nuova norma di Politica Economica.* — Ogni stato à la disponibilità del territorio su cui esso esercita la sua sovranità; e tale territorio — quanto che sia esteso — in tanto vale, in quanto à terre, in cui la popolazione può stabilmente insediarsi, e da cui può trarre, col lavoro, mezzi occorrenti alla sua vita. Un territorio, cioè, à valore demografico ed economico, se, e dove, è spazio vitale ⁽⁸⁾.

⁽⁸⁾ Cfr. FLORIDIA S., *Gli spazi vitali e i popoli della Terra*; Messina, D'Anna, 1940 (pagg. 117-119, e 224 e segg.).

E' evidente che ogni stato tende a possedere uno spazio vitale autarchico: atto, cioè, a fornire alla sua popolazione tutti i mezzi necessari o utili al mantenimento e allo sviluppo della sua esistenza.

Per gli odierni stati dell'Europa mezzi necessari o utili al mantenimento e al progressivo svolgimento della loro vita sono anche i prodotti tropicali; e poichè di questi prodotti nessuno stato europeo può convenientemente provvedersi in territori europei, consegue che nessuno degli stati europei può disporre in Europa di uno spazio vitale autarchico.

La coscienza di questa situazione — condizionata dalla geografia dell'Europa — à via via maturato una nuova norma di Politica Economica, profondamente geografica, e connessa alla tendenza degli stati con territori omogenei a diventare stati con territori eterogenei. Tale norma si può esprimere, in generale, così: *ogni stato, situato in climi temperati o freddi, deve, per la sua piena autarchia, integrare i propri spazi vitali con spazi vitali intertropicali.*

Questa norma trova la sua attuazione, in fatto e in potenza, fra le due parti del mondo più vicine e più dissimili: l'Europa e l'Africa. L'Europa è tutta fuori dei tropici; l'Africa è in massima parte entro i tropici; ed entrambe, da destini più o meno coscientemente preparati negli ultimi secoli, sono legate da rapporti politici ed economici, che già ne fanno — e più ne faranno in avvenire — un Continente Eurafriano, in cui le economie della dominatrice Europa, coi loro spazi vitali temperati, trovano la naturale integrazione nella produzione dei dipendenti spazi vitali intertropicali dell'Africa.

2. *La sperequazione nella ripartizione degli spazi vitali intertropicali.* — Relativamente ai singoli stati della Terra, la norma à la sua naturale attuazione nei maggiori stati

extra-europei, i cui territori, in una continuità ininterrotta, dalle zone temperate si affacciano ai tropici, o si estendono, oltre i tropici, nella zona equatoriale. Tali gli Stati Uniti, nel Nord America; la Cina, nell'Asia; e, soprattutto, il Brasile, esteso, quasi quanto l'Europa, dall'Equatore sin oltre il Tropico del Capricorno, nel Sud America.

Per gli stati dell'Europa la norma si è resa attuabile per quegli stati, che nell'epoca moderna — caratterizzata dalla invasione europea del mondo — ebbero l'audacia e la fortuna di costruirsi imperi coloniali nelle regioni intertropicali dell'Africa, dell'Asia, delle Americhe, e dell'Oceania.

Di questi stati europei àno sovrabbondanza di spazi vitali intertropicali: la *Gran Bretagna*, nei suoi quasi 34 milioni di kmq. di territori africani, asiatici, americani, ed oceanici; la *Francia*, nei suoi 12 milioni di kmq. di territori africani e asiatici; il *Belgio*, col suo vasto e naturalmente ricco Congo (2,3 milioni di kmq.); l'*Olanda*, con le sue ricchissime Indie Orientali (2 milioni kmq.); e il *Portogallo*, con i suoi possedimenti africani, di vaste possibilità (2 milioni kmq.).

Non sono nelle stesse condizioni: l'*Italia*, perchè i suoi possedimenti africani, pur essendo relativamente di non piccola estensione (3,4 milioni kmq.), sono in parte territori desertici, e, quindi, spazi non vitali; la *Spagna*, che del suo già immenso impero coloniale conserva trascurabili frammenti; e la *Danimarca*, la cui vasta e spopolata Groenlandia, situata in massima parte nella calotta artica, è spazio non vitale.

La norma non può avere oggi attuazione alcuna: per la *Germania*, il cui promettente impero coloniale (3 milioni kmq.) in Africa (Togo, Camerùn, Tanganica, Africa Sud-Ovest) e in Oceania, fu assorbito, in mandati, dalla Gran Bretagna e dalla Francia, in conseguenza della Prima Guerra Mondiale;

per la *Unione Russa*, i cui immensi territori europei ed asiatici sono interamente fuori e lontani dai tropici; per gli *Stati Scandinavi*, gli *Stati Balcanici*, ecc. Fuori dell'Europa, in condizioni quasi simili è il *Giappone*.

3. *La lotta per lo spazio vitale*. — Le diverse costituzioni fisio-psichiche, razziali, espresse da diversa potenza di energie vitali; e le diverse condizioni demografiche, espresse dai movimenti ascendenti o discendenti delle popolazioni, e rese acute ove il sovrappopolamento è congestionante; e le diverse condizioni politiche, espresse nella prepotenza di stati sovrani e padroni, e nella servitù di comunità dipendenti, sono fattori che muovono gli stati — con mezzi pacifici, o con mezzi violenti — nell'equilibrio instabile della loro coesistenza spaziale, in una incessante lotta per il dominio degli spazi vitali della Terra.

La lotta per lo spazio vitale è la lotta per la disponibilità della terra, quale prima e immanente fonte di mezzi vitali; e scaturisce dalla coscienza di un diritto collettivo alla vita, che — dalla insoddisfazione della propria esistenza, e dalla constatazione di un'ingiusta distribuzione degli spazi vitali — muove, contro gli stati straricchi, stazionari e conservatori, gli stati sovrappopolati, sostenuti da una strenua volontà di vivere e di progredire, e sollecitati da un prorompente bisogno di espansione della loro vigorosa vitalità.

Questa lotta, nell'epoca storica, si rileva massima e quasi continua per i popoli dell'Europa Occidentale: massimi attori della Storia del genere umano, e massimi artieri della civiltà umana. Per lungo volgere di secoli questa lotta fu contesa di predominio degli spazi vitali dell'Europa: lotta, cioè, entro l'Europa, e per l'Europa.

La moderna necessità di spazi vitali intertropicali, e la sperequazione nella odierna distribuzione di essi, rendono

più complessa e più acuta la lotta per lo spazio vitale: la quale dalla piccola e congestionata Europa dilata per il mondo, verso tutti i continenti, per un equilibrio di coesistenza spaziale non soltanto europeo, ma mondiale.

Per questo equilibrio, e per l'ampliamento del suo spazio vitale, si batte oggi la Germania contro le plutocrazie della Gran Bretagna e della Francia. E dovrà battersi presto anche l'Italia: nel suo interesse, per un proprio spazio vitale, mediterraneo ed africano, adeguato alla sua possente vitalità, nel « Mare Nostrum », libero da catene; e, nell'interesse della civiltà umana, per un'equa redistribuzione degli spazi vitali della Terra, secondo una giustizia internazionale.