SUL CALCOLO DELLE TARIFFE DI UNA COMPAGNIA DI ASSICURAZIONI SULLA VITA

PROF. PACIFICO MAZZONI
della R. Università di Bari.

I. — Introduzione.

1. Il calcolo delle tariffe di una compagnia di assicurazioni sulla vita offre uno dei più interessanti esempi di compromesso tra l'analisi teorica e le esigenze pratiche. Si può dire anzi che, in questo campo, la pratica ha spesso preceduto la teoria nella scelta di soluzioni che, trovate dapprima con criteri empirici, o sulla scorta del buon senso, hanno poi dimostrato di possedere un certo carattere di razionalità e di rispondere, più o meno bene, anche ad esigenze di carattere teorico.

E' notissimo che le basi tecniche per il calcolo delle tariffe sono: il *saggio d'interesse*, la *tavola di mortalità* ed i *coefficienti di spese*. E' anche noto che le spese di una impresa di assicurazioni sulla vita sogliono dividersi in tre categorie, e cioè le *spese di acquisizione* dei nuovi contratti, le *spese d'incasso* e le *spese generali di amministrazione*. Mentre però per le spese di acquisizione e d'incasso vi è una certa rispondenza tra i relativi caricamenti teorici e la reale entità di tali spese, invece per quelle di amministrazione è grandissimo il divario fra il margine teorico e la realtà, quando si considerino le *singole* polizze, pur potendo esservi, nel complesso, un certo equilibrio tra i caricamenti e le spese *globali* effettive.

In questo lavoro ci occupiamo principalmente di queste ultime spese, cioè quelle di amministrazione, e delle soluzioni empiriche che la pratica ha indicato ed ha finito per imporre, cercando di lumeggiare quali sono le intime ragioni che giustificano tali soluzioni. Dimostreremo che *nelle soluzioni pratiche si deve riconoscere l'esistenza di un elemento che va posto in relazione al rischio delle singole polizze.*

Insomma là dove la teoria matematica del rischio, pur così bella ed elegante, non è riuscita ai suoi fini, ha certamente ottenuto molto di più l'empirismo, con le soluzioni che ha finito per adottare.

Esaminando i problemi da un tale nuovo punto di vista, sarà facile quindi rendersi conto di taluni difetti od assurdità di certi criteri di caricamento (come, ad esempio, quelli usati nella forma assicurazione mista e, in genere, nelle forme a premi temporanei), ed avere anche una guida nella scelta dei metodi più opportuni da seguire. Esporremo infine alcuni tentativi per risolvere in modo razionale il problema di stabilire dei *caricamenti per le spese di gestione,* limitandoci a considerare due delle principali forme di assicurazioni, la vita intera a premi vitalizi e la mista a premi annui, stabilendo alcuni criteri generali, che riteniamo possano utilmente seguirsi in pratica, nella ricerca di soluzioni concrete.

2. In un nostro precedente lavoro esponevamo alcune considerazioni sulle spese di amministrazione: (1) «..... un'analisi minuziosa delle varie fonti di spese di una compagnia è sempre molto delicata e difficilmente traducibile in relazioni matematiche che rispecchino fedelmente la realtà delle cose. Di ciò è prova evidente la grande varietà (ed anche arbitrarietà) dei metodi di caricamento usati. Questo si verifica specialmente per le spese di gestione, le quali hanno in pratica un andamento assai lontano da quello che è previsto nella costruzione nelle tariffe».

«E' notorio infatti che esistono delle spese che sono inerenti all'amministrazione del patrimonio dell'azienda e che si

(1) P. Mazzoni, *Su alcune conseguenze delle variazioni del saggio d'interesse nella matematica attuariale,* Atti del X Congresso internazionale degli Attuari, vol. III, Roma, 1934.

possono ritenere proporzionali alla sua entità (ad esempio le imposte, i margini da destinare a costituzione di riserve speciali di sicurezza); codeste spese è dunque più corretto considerarle, dal punta di vista attuariale, come approssimativamente proporzionali alle riserve matematiche delle singole polizze, e perciò si traducono in una diminuzione del saggio d'investimento » (1).

« Altre spese si possono ritenere pressochè costanti per tutte le polizze esistenti in un dato esercizio, almeno per una data classe di contratti (ad esempio le spese necessarie per operazioni di registrazioni, per la valutazione di riserve); spese dunque indipendenti dai premi versati e pure indipendenti dai capitali assicurati ».

« Altre fonti di spese è dubbio se convenga ripartirle proporzionalmente ai premi versati, ovvero se considerarle come una diminuzione del saggio di rendimento (e quindi proporzionali alle riserve matematiche); tali, ad esempio, le spese cui si va incontro per l'impiego dei capitali ».

Sull'analisi delle spese rimandiamo ancora al trattato del Berger, (2) da cui riportiamo le seguenti osservazioni (pag. 45); « Le spese correnti di amministrazione possono quindi essere divise in due categorie: una categoria di spese, che chiameremo spese d'incasso, proporzionali al premio ed una seconda categoria di spese che si possono considerare uguali per ciascuna assicurazione senza riguardo alla somma assicurata; in confronto a queste due categorie di spese correnti tutte le altre spese perdono la loro importanza; ne segue che le spese correnti diminuiscono relativamente all'entità del capitale assicurato; pertanto più elevato è il capitale assicurato e minore è la rispettiva percentuale delle spese correnti ».

(1) Ricordiamo che l'utile d'interesse è approssimativamente della forma $V \cdot \Delta i$, cioè proporzionale alla riserva matematica V ed allo scarto Δi tra il saggio *reale* d'interesse e quello *teorico*. Altrettanto dicasi per le eventuali perdite d'interesse; perciò una spesa che sia proporzionale alla riserva produce le stesse conseguenze come se diminuisse il saggio reale d'interesse.

(2) A. Berger, *Tecnica dell'assicurazione sulla vita umana* (traduzione del Conforto), L. Cappelli editore, Bologna, 1934.

« Parecchi autori, sopravalutando tale circostanza, richiedono espressamente un premio, che diminuisca proporzionalmente con l'aumentare della somma assicurata..... Contro tale criterio si solleva poi ancora una obiezione, che ha seza dubbio un certo fondamento: si afferma cioè che può essere considerato corretto e giustificato, per motivi di ordine sociale, che i premi per i maggiori capitali assicurati intervengano a favore degli assicurati minori, che economicamente possono reclamare una maggiore tutela per la lodevole loro tendenza al previdente risparmio».

« Noi divideremo in seguito le spese correnti di amministrazione semplicemente in una parte proporzionale al premio ed in una parte proporzionale al capitale assicurato » (1).

Secondo il TOJA, le spese di gestione in pratica raggiungono un ammontare che si aggira intorno al $4\,{}^1/_2\,{}^0/_0$ del totale dei premi incassati nell'esercizio, ovvero al $3\,{}^0/_{00}$ del totale dei capitali assicurati.

Dalla *Relazione* dell' Istituto nazionale delle assicurazioni sull'andamento della gestione nel quinquennio 1927-31, risulta che per l'anno 1931, si è avuta una spesa di amministrazione di L. 28.529.461, che raggiunge circa il $4\,{}^1/_2\,{}^0/_0$ del totale dei premi incassati ed il $2{,}5\,{}^0/_{00}$ del totale dei capitali assicurati. Siccome il numero dei contratti in vigore alla fine del 1931 era di 1.027.835 (pag. 46), *risulta così una spesa media di circa L. 28 per ogni polizza.*

II. — Il caricamento per le spese di gestione ed il rischio.

3. Come si è già detto, in pratica viene comunemente adottata una soluzione intermedia, per stabilire il caricamento per le spese di gestione; cioè questo viene commisurato ad una percentuale del premio di tariffa, più una percentuale del capitale assicurato. Consideriamo alcuni esempi, per poter trarre le opportune deduzioni.

---

(1) Interessanti considerazioni sono anche contenuie nel libro del TOJA: *Il calcolo delle tariffe di una compagnia di assicurazioni sulla vita,* Roma, 1925.

Esaminiamo dapprima la forma di assicurazione *in caso di morte per la vita intera, a premi annui.* Supponiamo che il saggio d'interesse adottato sia il 4 %, che la tavola di mortalità sia la tavola H^M, che per le spese di *acquisizione* sia stabilito come caricamento il 6 % del premio di tariffa *ogni anno*, e per le spese d'*incasso* sia stabilito come caricamento il 3 % del premio di tariffa.

Per le spese di *amministrazione* consideriamo i seguenti quattro tipi di caricamento, tre dei quali rispondono, per così dire, a soluzioni estreme ed uno a soluzione intermedia:

I tipo : caricamento pari al 5 % del premio di tariffa ogni anno ;

II tipo : caricamento al pari del 3 ‰ del capitale assicurato ;

III tipo : caricamento pari al 3 % del premio di tariffa più 1,5 ‰ del capitale assicurato (soluzione intermedia);

IV tipo : è abolito il caricamento per le spese di gestione, ma sono però sostituiti ai premi puri relativi al saggio d'interesse del 4 % i premi puri relativi al saggio del 3 %.

Indichiamo con P_x il premio annuo *puro*, relativo al capitale assicurato unitario, e con π_x il premio *di tariffa*. Per semplicità di calcolo, consideriamo il premio P_x, invece del premio

$$\overline{P}_x = P_x \ (l + i)^{\frac{1}{2}},$$

comunemente usato.

Nel primo tipo di caricamento il primo annuo di tariffa si deduce dalla relazione

$$\pi_x = P_x + 0{,}06\ \pi_x + 0{,}03\ \pi_x + 0{,}05\ \pi_x\,,$$

da cui si ha la formula

$$\pi_x = \frac{P_x}{0{,}86}\,. \tag{1}$$

Il caricamento per le spese di gestione è dato allora dalla formola

[2] $$M = 0{,}05\ \pi_x = \frac{0{,}05\ P_x}{0{,}86}\ .$$

Nel secondo tipo di caricamento il premio di tariffa è dato dalla relazione

[3] $$\pi_x = \frac{P_x + 0{,}003}{0{,}91}\ ,$$

e il relativo margine per le spese di gestione è la quantità fissa 0,003.

Nel terzo tipo di caricamento il premio di tariffa è dato dalla relazione

[4] $$\pi_x = \frac{P_x + 0{,}0015}{0{,}88}\ ,$$

e il relativo margine per le spese di gestione è dato dalla quantità

[5] $$M_x = 0{,}03\ \pi_x + 0{,}0015\ .$$

Nel quarto tipo di caricamento il premio di tariffa è dato dalla relazione

[6] $$\pi_x = \frac{P_x\,(0{,}03)}{0{,}91}\ ,$$

in cui si è indicato con $P_x\,(0{,}03)$ il premio puro relativo al saggio d'interesse del 3 %. Il margine per le spese di gestione è dato, in questo caso, dalla quantità

$$M_x = P_x\,(0{,}03) - P_x\,(0{,}04)\ .$$

Riportiamo nella seguente tabella i valori dei premi di tariffa secondo i suddetti quattro diversi tipi di caricamento, ed i corrispondenti margini disponibili per le spese di gestione, relativi alle seguenti età all'entrata: 25, 35, 45, 55, 65 anni.

TABELLA I. — *Assicurazione in caso di morte per la vita intera, a premi annui. Tavola H^M, 4 %. Premi annui di tariffa e caricamento per le spese di gestione secondo i quattro diversi tipi considerati; Capitale assicurato L. 1000.*

Età alla entrata x	Premi annui di tariffa				Margine per le spese di gestione			
	tipo I	tipo II	tipo III	tipo IV	tipo I	tipo II	tipo III	tipo IV
25	16,64	19,02	17,97	17,89	0,83	3	2,04	1,97
35	22,80	24,85	23,99	24,02	1,14	3	2,22	2,25
45	33,31	34,78	34,26	34,23	1,67	3	2,53	2,50
55	51,99	52,43	52,51	52,05	2,60	3	3,07	2,66
65	86,67	85,21	86,41	84,97	4,33	3	4,09	2,78

Si osserva che il primo tipo di caricamento (proporzionale al premio) fa aumentare molto i premi per le età anziane e mantiene bassi i premi per le età giovanili; il contrario accade invece per il secondo tipo di caricamento (proporzionale al capitale assicurato), che tende ad aggravare i premi per le età giovanili e mantiene relativamente bassi quelli per le età anziane.

Nel primo tipo il margine per le spese di gestione è molto basso, del tutto insufficiente, per le età giovanili, e molto alto per le età anziane; nel secondo tipo il margine è costante, pari a 3 nell'esempio considerato.

Siccome le spese per le singole polizze possono considerarsi costanti, cioè indipendenti dall'età, *a prima vista sembrerebbe preferibile una soluzione del secondo tipo, cioè un caricamento unicamente proporzionale al capitale assicurato.*

Una tale conclusione potrebbe essere avvalorata anche da altre considerazioni. Il contenere i premi, già forti, per le età anziane, contribuisce a renderli meno proibitivi; invece un moderato aumento dei premi per le età giovanili può essere benissimo sopportato da codesti assicurati. Non bisogna dimenticare quello che è il fondamento dell'assicurazione; gli assicurati formano una massa di individui, costituita perchè i danni economici derivanti dalla morte di alcuni membri vengano sopportati da tutti gli altri membri, più resistenti fisicamente o più fortunati. Tra essi è dunque stabilito un vero legame di solidarietà sociale; in altre parole, tra essi viene ad attuarsi quella che possiamo chiamare una *perequazione* nel campo della *mortalità*. Allo stesso modo si ha pure una perequazione del *saggio d'interesse* (che praticamente è unico per tutti, anche se il saggio di rendimento per la compagnia risulta diverso per i vari impieghi dei fondi disponibili), e si spiegherebbe così perfettamente anche una perequazione nel campo del *spese*.

Aggiungiamo che il Toja dice che lo spostare il livello dei premi a favore delle età anziane e a danno delle giovanili risulta conforme ai principi della *selezione*; ma non ci soffermiamo su una tale considerazione, che riteniamo di un valore discutibile, perchè non ci sembra corretto il far assegnamento, nell'intento di contenere i premi, sugli utili di mortalità dovuti alla selezione nei primi anni, perchè tali utili sono destinati a compensare, in parte, l'assicuratore delle spese anticipate per l'acquisto dei contratti.

La soluzione più logica, sempre a prima vista, sembra essere dunque la seconda, cioè un caricamento *uniforme*.

Invece la pratica si è orientata verso il terzo tipo, che rappresenta una soluzione intermedia, con margine variabile, nell'esempio considerato, da 2 a 4, secondo l'età, dunque leggermente crescente con l'età all'entrata. Sembra evidente che le compagnie assicuratrici abbiano sentito il bisogno di cautelarsi maggiormente, nel caso dei contratti stipulati in età anziane. *Lo stabilire un caricamento maggiore per tali contratti equivale dunque a tener conto del maggiore rischio che essi presentano, nei confronti dei contratti stipulati in età giovanili.*

Questa riteniamo che sia l'interpretazione più corretta, e la giustificazione dei criteri di caricamento adottati dalla pratica, mediante soluzioni intermedie, del terzo tipo. Così si tiene conto, in certo modo, del maggiore o minore rischio che i singoli contratti presentano per la compagnia.

Il quarto tipo di caricamento dà risultati molto vicini al terzo, per le età all'entrata inferiori a 50 anni. Questo dimostra che esiste un legame anche tra il saggio tecnico d'interesse adottato nel calcolo dei premi ed il rischio relativo ai vari contratti di assicurazione. *Il ribassare artificialmente il saggio tecnico d'interesse significa introdurre anche un certo elemento, in relazione col suddetto rischio.*

4. Proseguiamo la ricerca, considerando ora un altro elemento, del quale occorre pure tener conto, cioè il capitale assicurato.

Supposto adottato il terzo tipo di caricamento per le spese di gestione, pari al 3 % del premio di tariffa più 1,5 ‰ del capitale assicurato, calcoliamo, in base agli stessi dati del num. precedente, il valore del margine disponibile per le spese di gestione, quando il capitale assicurato sia rispettivamente di lire 1000, 10.000, 15.000, 20.000, e 100.000. Riportiamo nella seguente tabella i valori che risultano per tale margine.

TABELLA II. — *Margine disponibile per le spese di gestione.*

Età alla entrata x	Premio puro unitario P_x	Margine per le spese di gestione — Capitale assicurato				
		L. 1000	L. 10.000	L. 15.000	L. 20.000	L. 100.000
25	0,01431	2,0390	20,39	30,59	40,78	203,90
35	0,01961	2,2197	22,20	33,30	44,39	221,97
45	0,02865	2,5278	25,28	37,92	50,56	252,78
55	0,04471	3,0753	30,75	46,14	61,50	307,53
65	0,07454	4,0923	40,92	61,38	81,84	409,23

Supposto, a titolo di esemplificazione, che la spesa media di amministrazione per ogni polizza sia di lire 30 all'anno, risulta dal precedente prospetto che se il capitale assicurato raggiunge L. 15.000, allora il margine stabilito per le spese di gestione è sufficiente a fronteggiare la spesa effettiva di lire 30; ma se il capitale assicurato è inferiore a L. 15.000, allora il detto margine non risulta sufficiente, per alcune o per tutte le età, e la Compagnia assicuratrice deve cercare un compenso a tale perdita nelle altre fonti di utili (di mortalità e d'interesse). Se, al contrario, il capitale assicurato è, poniamo, di L. 100.000, allora il margine previsto risulta di gran lunga superiore alla spesa, perchè varia da L. 200 a 400, ossia da circa 7 volte sino a 13 volte la spesa effettiva di lire 30.

D'altra parte, siccome è notorio che in pratica vi è un certo equilibrio tra la spesa complessiva di amministrazione ed il caricamento globale corrispondente, si conclude che vi sono delle polizze per le quali la spesa effettiva è superiore al margine previsto, ed altre polizze per le quali, al contrario, la spesa è inferiore al margine.

Si può dire insomma che le polizze per capitali elevati intervengono a favore delle polizze per capitali modesti, per integrarne il margine insufficiente per le spese di gestione. E' un livellamento che si attua, e che, considerato dal punto di vista della compagnia assicuratrice, si deve porre in relazione al maggiore o minore rischio che i singoli contratti presentano, in dipendenza del capitale assicurato più o meno elevato. Non deve considerarsi come una delle tante forme sociali di perequazione in questo campo, per cui possa sembrare opportuno che individui economicamente più fortunati intervengano, in certo modo, a favore degli altri; si tratta invece della necessità, avvertita dalle compagnie, che le polizze più rischiose paghino proporzionalmente di più delle polizze meno rischiose.

L'empirismo ha dunque trovato, nelle sue soluzioni semplificatrici, degli elementi che hanno in fondo la funzione di fronteggiare, in qualche modo, il rischio connesso con le singole polizze, là dove la teoria matematica del rischio non può dirsi sia ancora riuscita allo scopo.

III. — **Digressione sulla teoria del rischio.**

5. Facciamo una breve digressione sulla teoria del rischio. Essa considera le conseguenze degli scarti *casuali* della mortalità, e non si occupa degli scarti *sistematici*, perchè è da supporre che, per fronteggiare gli scarti sistematici che eventualmente si rivelino, la compagnia provveda mediante cambiamenti delle basi tecniche o stabilendo degli opportuni caricamenti industriali per sopramortalità, insomma rivedendo le tariffe.

Per un dato contratto di assicurazione la teoria matematica del rischio definisce alcuni elementi, come il cosidetto *rischio lineare* ed il *rischio quadratico,* i quali però devono considerarsi come dei numeri indici del grado maggiore o minore di pericolosità del contratto, come un'indicazione termometrica; ma non forniscono in pratica un dato di cui si possa facilmente tener conto nella costruzione delle tariffe della compagnia. Basta esaminare, infatti, le due note formule del rischio lineare e del rischio quadratico, per convincersene.

Il *rischio lineare* (o *matematico*) ha un'espressione della forma

[7] $$D = \sum_{A > E} q_r \left(A_r - E_r\right) ,$$

ed il *rischio quadratico* (o *rischio medio*) ha l'espressione

[8] $$M = \sqrt{\Sigma\, q_r \left(A_r - E_r\right)^2} ,$$

nelle quali la quantità $A_r - E_r$ rappresenta la differenza tra il valor attuale di ciò che la compagnia dovrebbe pagare, se il decesso dell'assicurato avvenisse nell'*r.mo* anno assicurativo ed il valor attuale di ciò che sino a quell'epoca avrebbe invece pagato l'assicurato; infine q_r indica la probabilità di decesso nell'*r.mo* anno.

Ora il buon senso suggerisce che, quanto maggiori sono tali differenze $A_r - E_r$, tanto più rischioso è il contratto per la compagnia, perchè questa si troverà esposta per somme maggiori; e così pure è intuitivo che se maggiori sono le probabilità di morte, maggiore sarà pure il rischio. Però i valori numerici forniti dalle due formole [7] e [8] in fondo non dicono nulla di preciso, se non che il contratto è più o meno rischioso. Così, ad esempio, un valore doppio del rischio lineare non corrisponde ad un valore doppio del rischio medio e non significa affatto che l'assicurato debba pagare un caricamento doppio.

Il fatto stesso che si considerano due diversi tali numeri, come il rischio lineare ed il rischio quadratico, costituisce una prova che essi non possono avere che il valore di una vaga indicazione di un grado maggiore o minore di pericolosità.

Aggiungiamo che un elemento essenziale del rischio, per la compagnia, è dato dal numero dei contratti e dall'ammontare dei capitali assicurati. Per questo motivo molti studi sono rivolti a tentare di definire e valutare il rischio rappresentato da una determinata massa di contratti, ossia da una determinata situazione del portafoglio, anzichè il rischio di singoli contratti.

Alcuni autori hanno pure considerato il problema di stabilire dei caricamenti espliciti di sicurezza, in esclusivo rapporto al rischio (1); ma noi riteniamo che il problema non vada disgiunto da quello del caricamento per le spese di gestione. La pratica almeno ha fuso i due problemi in uno solo.

La via da seguire, per tentare di dare un assetto più razionale al problema della costruzione delle tariffe, in modo da tener conto del rischio dei contratti di assicurazione, riteniamo sia quella che ci viene appunto suggerita dall'esperienza, e che ci proponiamo di approfondire e di sviluppare, una volta entrati in un tale ordine d'idee.

IV. — Tentativi per stabilire dei sistemi razionali di caricamento per le spese di gestione.

Assicurazione in caso di morte.

6. Considerata la forma di assicurazione *vita intera a premi vitalizi*, osserviamo che spesso il caricamento complessivo per le spese di *acquisizione* e *d'incasso* viene espresso sotto la forma di una certa percentuale α del premio di tariffa π_x *ogni anno* (2), e che talvolta si aggiunge un caricamento ulteriore, per fronteggiare una sopramortalità, spesso assunto sotto la forma di

(1) Vedasi il citato trattato del BERGER, § 14, e le comunicazioni del BOHLMANN e dal TAUBER al VI Congresso Internazionale degli Attuari.

(2) Analoga sarebbe la trattazione del caso che si stabilisse invece per le spese di acquisizione una certa percentuale del capitale assicurato C, ripartita su tutta la durata del contratto, ossia un caricamento della forma $\frac{\alpha}{a_x} C$ (in modo che il valore attuale di tali margini uguagli la quantità αC).

una percentuale β del capitale assicurato (come, ad esempio, nel caso di extrarischi professionali).

In generale, supponiamo dunque che, *per tutte le spese diverse da quelle di amministrazione e per fronteggiare un'eventuale sopramortalità, sia stabilito un caricamento complessivo sotto la forma di una percentuale α del premio di tariffa ogni anno, più una percentuale β del capitale assicurato.*

Così, nell'esempio considerato al n. 3 (caricamento pari al 6 % di π_x ogni anno per spese di acquisizione e 3 % di π_x per spese d'incasso), sarà:

$$\alpha = 0{,}06 + 0{,}03 = 0{,}09\,; \quad \beta = 0.$$

Se assumiamo inoltre come *caricamento per le spese di gestione una certa percentuale γ del premio di tariffa π_x più una certa percentuale δ del capitale assicurato*, allora ha luogo la relazione

$$[9] \qquad \pi_x = P_x + \alpha\,\pi_x + \beta + \gamma\,\pi_x + \delta\ ,$$

avendo supposto che il capitale assicurato sia di una lira.

Da essa si ricava la seguente *espressione del premio annuo π_x di tariffa in funzione del premio puro P_x* e dei suddetti coefficienti α, β, γ, δ:

$$[10] \qquad \pi_x = \frac{P_x + \beta + \delta}{1 - \alpha - \gamma}\ .$$

Il margine M_x destinato a sopperire alle sole spese di gestione è dato dalla formola seguente, in funzione del premio di tariffa:

$$[11] \qquad M_x = \gamma\,\pi_x + \delta\ ,$$

oppure, a causa della [10], dall'altra formola, in funzione del premio puro:

$$[11'] \qquad M_x = \frac{\gamma\,(P_x + \beta) + \delta\,(1 - \alpha)}{1 - \alpha - \gamma}\ .$$

Il problema che ci proponiamo di risolvere è il seguente: *cercare di stabilire le percentuali di caricamento per le spese di* *gestione in modo da tener conto, sia pure in via approssimata, e come problema di perequazione, del rischio che i vari contratti presentano per la compagnia assicuratrice, in dipendenza sia del capitale assicurato, che dell'età all'entrata.*

Siccome i due fattori del rischio sono appunto il *capitale assicurato* e l'*età* alla stipulazione del contratto, occorre seguire un metodo che permetta di tener conto di qnesti due elementi. A tale scopo imporremo le due condizioni seguenti:

1° *che, in corrispondenza di un certo capitale assicurato* C_0 *e di una determinata età all'entrata* a, *il caricamento*

$$C_0\, M_a = C_0\, (\gamma\, \pi_a + \delta)$$

per le spese di gestione uguagli la spesa effettiva media S *per ogni polizza*;

2° *che, in corrispondenza di un'altra età all'entrata* x, *il caricamento* $C_0\, M_x = C_0\, (\gamma\, \pi_x + \delta)$ *uguagli il prodotto* $S\,.\,k$, *avendo indicato con* k *un coefficiente, in generale dipendente dall'età* x, *sul cui valore verranno poi compiute delle opportune indagini.*

Se l'età x è maggiore di a, allora si assumerà il coefficiente k maggiore dell'unità, in modo che ad un'età maggiore corrisponderà un margine maggiore per fronteggiare le spese di gestione.

A causa della [11'], tali condizioni si traducono nelle due seguenti equazioni, per le due incognite γ e δ:

[12] $$C_0\, \frac{\gamma\, (P_a + \beta) + \delta\, (1 - \alpha)}{1 - \alpha - \gamma} = S\,,$$

[13] $$C_0\, \frac{\gamma\, (P_x + \beta) + \delta\, (1 - \alpha)}{1 - \alpha - \gamma} = Sk\,.$$

Liberando dal denominatore, risulta un sistema di primo grado; risolvendolo e chiamando brevemente s_0 il rapporto $\dfrac{S}{C_0}$, *si hanno le due seguenti espressioni per i due coefficienti incogniti* γ *e* δ:

[14] $$\gamma = \frac{s_0\, (1 - \alpha)\, (k - 1)}{P_x - P_a + s_0\, (k - 1)}\,,$$

$$\delta = s_0 \frac{P_x - k\,P_a - \beta\,(k-1)}{P_x - P_a + s_0\,(k-1)} \,. \tag{15}$$

Il coefficiente γ risulta sempre positivo.

Infatti se è $x > a$, dovendo essere $k > 1$, ed essendo in pratica $\alpha < 1$ e $P_x > P_a$, dalla [14] risulta che γ è positivo. Analogamente, se è $x < a$.

Invece il coefficiente δ può risultare positivo o negativo. Teoricamente nulla vieta che δ sia negativo; ma in pratica è sempre opportuno partire da valori di a, x e k tali che la percentuale δ risulti positiva.

In pratica vedremo che è generalmente trascurabile il prodotto $s_0\,(k-1)$, che figura nei denominatori delle [14] e [15], e pure il prodotto $\beta\,(k-1)$, che figura nel numeratore della [15]. Trascurando tali quantità, abbiamo per γ e δ le due espressioni approssimate:

$$\gamma \simeq \frac{s_0\,(1-\alpha)\,(k-1)}{P_x - P_a} \,, \tag{16}$$

$$\delta \simeq \frac{s_0\,(P_x - k\,P_a)}{P_x - P_a} \,. \tag{17}$$

Dunque: *le due percentuali γ e δ sono approssimativamente proporzionali alla quantità s_0 (rapporto fra la spesa media S ed il capitale medio assicurato C_0). Inoltre la percentuale γ è approssimativamente proporzionale alla differenza $k - 1$. In generale, se, a parità degli altri elementi, il coefficiente k cresce, la percentuale γ pure aumenta, mentre la percentuale δ diminuisce.*

Osserviamo inoltre che *il valore del coefficiente* β (che ordinariamente figura soltanto quando viene praticato un caricamento industriale per sopramortalità, sotto la forma di un aumento percentuale del capitale assicurato) *non influisce affatto sul valore del coefficiente γ, ma soltanto sul valore del coefficiente δ, però in misura trascurabile in pratica.*

Infatti nella formola [14] non figura β, e nella [15] il prodotto $\beta\,(k-1)$ è trascurabile, di fronte al termine $P_x - k\,P_a$, perchè difficilmente β potrà superare il valore 0,002, $k - 1$, come vedremo, in pratica si aggira intorno a 0,3.

Nel caso che, per una ragione qualsiasi, si ritenga opportuno di fissare il valore di una delle due percentuali γ o δ, ad esempio il valore di δ, allora si otterrà il valore dell'altro coefficiente γ dalla sola prima condizione imposta, ossia dall' equazione [12]. Si ottiene allora la seguente *espressione del coefficiente* γ *in funzione dell'altro coefficiente* δ :

[18] $$\gamma = \frac{(s_0 - \delta)(1 - \alpha)}{P_a + \beta + s_0} \, .$$

7. Il calcolo delle due percentuali γ e δ riesce dunque molto semplice, una volta determinato il valore del coefficiente k.

Tale coefficiente k, in generale, si può supporlo variabile con l'età all'entrata x; ma allora risulterebbero pure variabili le percentuali γ e δ, e ciò costituirebbe in pratica un notevole inconveniente. La ricerca di un valore medio di k, comune per tutte le età, è in fondo un problema d'interpolazione, molto delicato invero, a causa delle molteplici incertezze che presentano le ipotesi che possiamo formulare al riguardo e della mobilità del terreno su cui si deve operare. Vedremo però che, seguendo opportuni criteri, riscontreremo un notevole grado di stabilità nei valori presumibili per k, e questo fatto agevolerà molto la risoluzione del suddetto problema d'interpolazione.

E' anzitutto evidente che sul grado di pericolosità dei contratti influisce il *numero* dei contratti raccolti; ma per noi un tale elemento non è ancora sufficiente, perchè gli scarti, in più od in meno, della mortalità sono da porsi in relazione al numero complessivo degl'individui assicurati che hanno raggiunto una determinata età, in un dato esercizio, oltre che in relazione col taglio dei capitali assicurati. Ad esempio, se in un anno si è emesso un solo contratto per l'età, poniamo, di 28 anni, e l'anno precedente si raccolsero invece centomila contratti per individui di 27 anni, e tutti per un uguale capitale assicurato, allora è evidente che quell'unico contratto raccolto durante il secondo anno non presenterà un rischio apprezzabile per la compagnia assicuratrice. Ma se invece in un dato esercizio si sono raccolti mille contratti per individui di 25 anni, mentre durante l'anno precedente non si raccolse nessun contratto per individui di 24 anni, allora è evidente che per i secondi mille contratti il rischio della compagnia sarà ben maggiore che per quell'unico contratto emesso per un individuo di 28 anni. Insomma il rischio dipende essenzialmente dalla composizione del portafoglio.

Soltanto l'esperienza, mediante delicate indagini statistiche, potrà fornire delle preziose indicazioni al riguardo; perciò in questo studio saremo costretti a formulare delle opportune ipotesi intorno ai valori presumibili per il coefficiente k.

Una prima ipotesi che può venire in mente di formulare è che k sia proporzionale al rischio matematico oppure al rischio medio dell'operazione. Un'altra ipotesi, più semplice, è che k sia proporzionale alla quantità $\sqrt{\frac{p_x\, q_x}{n_x}}$ (scarto quadratico medio relativo); precisamente che k sia uguale al rapporto

$$[19] \qquad k = \sqrt{\frac{p_x\, q_x}{n_x}} : \sqrt{\frac{p_a\, q_a}{n_a}} = \sqrt{\frac{n_a\, p_x\, q_x}{n_x\, p_a\, q_a}}\,,$$

avendo indicato con n_x il numero complessivo degl'individui aventi età x con n_a quello degl'individui di età a, ed infine con p_x e q_x i noti tassi annuali di sopravvivenza e di mortalità.

La prima ipotesi presenta il vantaggio di considerare l'intero decorso del contratto, ma ha l'inconveniente di trascurare il numero dei contratti esistenti nel portafoglio, per ogni età. Nella seconda ipotesi si parte dalle sole due età all'entrata a ed x, ma si tiene conto del numero dei contratti. Vediamo praticamente quali risultati si ottengono, seguendo l'uno o l'altro di tali criteri per il calcolo del coefficiente k.

8. In questa indagine, che ha carattere, più che altro, di esemplificazione, trascuriamo il numero dei contratti raccolti. Considerando ancora l'assicurazione in caso di morte per la vita intera, a premi annui $\overline{P}_x$, supponiamo che la tavola di

mortalità sia la *S. I. mf*, 1901, cioè quella della popolazione generale mista italiana, desunta dal censimento del 1901, e che il tasso tecnico d'interesse sia il 4 %. Supponiamo che il caricamento per le spese di acquisizione dei contratti sia il 6 % del premio di tariffa π_x ogni anno e quello per le spese d'incasso sia il 3 % di π_x; sarà dunque $\alpha = 0{,}09$ e $\beta = 0$ (n. 6). Partendo dalle due età $a = 30$ e $x = 50$ anni, assumiamo il coefficiente k pari al rapporto dei valori dei due rischi matematici relativi a tali età, i quali sono di facile calcolazione (mentre più laborioso sarebbe il calcolo dei rischi medi); cioè assumiamo

$$k = \frac{D(\overline{P}_{50})}{D(\overline{P}_{30})} .$$

Siccome è noto che ha luogo la seguente formola per il rischio matematico:

$$D(\overline{P}_x) = \frac{{}_{z|}\overline{a}_x}{\overline{a}_x} , \tag{20}$$

in cui z indica il cosidetto *numero critico* (1), risulta

$$D(\overline{P}_{30}) = 0{,}1049 \text{ e } D(\overline{P}_{50}) = 0{,}1419 ,$$

e perciò si ottiene per il coefficiente k il valore

$$k = \frac{0{,}1419}{0{,}1049} = 1{,}3527 .$$

Supponiamo inoltre che la spesa S di gestione per ogni polizza sia di L. 30 ogni anno e poniamo la condizione che per il capitale assicurato $C_0 =$ L. 15.000 la polizza debba bastare a se stessa (cioè il caricamento debba essere pari alla spesa S); abbiamo allora:

$$\alpha = 0{,}09 ; \ \beta = 0 ; \ s_0 = 30 : 15000 = 0{,}002 ; \ k = 1{,}3527 ;$$
$$\overline{P}_{30} = 0{,}01540 ; \ \overline{P}_{50} = 0{,}03346 .$$

---

(1) Ricordiamo che il *numero critico* (o *vita matematica*) è il numero z che verifica la seguente equazione:

$$\frac{1 - (1 + i)^{-z}}{log\ nat\ (1 + i)} = \overline{a}_x . \tag{21}$$

Sostituendo tali valori nelle due formole fondamentali [14] e [15], abbiamo, per i coefficienti cercati γ e δ, i seguenti valori:

$$\gamma = 0{,}03420\,;\ \delta = 0{,}001346\ .$$

Dunque: *secondo le suddette ipotesi, assumendo per valore del coefficente k il rapporto $\frac{D(\overline{P}_{50})}{D(\overline{P}_{30})}$ tra i due rischi matematici relativi alle età di 50 anni e di 30 anni, risulterebbe come caricamento per le spese di gestione la percentuale del 3,42 per cento del premio di tariffa, più 1,35 per mille del capitale assicurato.*

Assumiamo invece il coefficiente k pari al rapporto $\sqrt{\frac{q_{50}}{q_{30}}}$, avendo tralasciato di considerare, oltre al numero dei contratti, anche il fattore $\frac{p_{50}}{p_{30}}$, che in pratica ha un'influenza trascurabile (esso farebbe impiccolire il valore di γ di una quantità compresa tra l'1 °/₀ ed il 2°/₀ di γ stesso); abbiamo allora

$$\sqrt{\frac{q_{50}}{q_{30}}} = \sqrt{1{,}71640} = 1{,}3101\ ,$$

e dalle formole [14] e [15] risultano rispettivamente per γ e δ i seguenti valori:

$$\gamma = 0{,}030217\,;\ \delta = 0{,}001422\ .$$

Dunque: *assumendo per k il valore $\sqrt{\frac{q_{50}}{q_{30}}}$, risulterebbe come caricamento per le spese di gestione circa il 3 °/₀ del premio di tariffa, più l'1,4 °/₀₀ del capitale assicurato, percentuali queste che si avvicinano molto a quelle usate in pratica, per questa forma di assicurazione.*

Assumendo invece per k il valore $\sqrt{\frac{q_{55}}{q_{35}}} = 1{,}4527$, si ottengono per γ e δ i seguenti valori:

$$\gamma = 0{,}04346\,;\ \delta = 0{,}001164\ .$$

Assumere tali percentuali significherebbe aggravare molto i premi per i contratti stipulati in età anziane, ciò che può essere consentito nel caso che si ritenga che tali contratti possano risultare eccessivamente rischiosi. Sembra però evidente che, ad un'età così avanzata, come 55 anni, il numero dei contratti raccolti dev'essere molto esiguo; perciò in pratica, nella risoluzione di un tale problema d'interpolazione, le età all'entrata superiori a 50 anni non è forse il caso di prenderle in considerazione; sono evidentemente le età centrali quelle che hanno un maggior peso.

Infine, assumendo per k il valore $\sqrt{\frac{q_{45}}{q_{25}}} = 1{,}1791$, si ottengono per γ e δ i seguenti valori:

$$\gamma = 0{,}02402\,;\ \delta = 0{,}001593\,.$$

Ripetiamo che soltanto delle indagini delicate ed esaurienti possono permettere di dare delle risposte attendibili sul valore da assumere per il coefficiente k. Domunque, se si dovesse giudicare dal modo come si è andata orientando l'esperienza, sembra di poter concludere che *nella forma vita intera a premi vitalizi non è opportuno assumere per k un valore della forma $\frac{D\,(P_x)}{D\,(P_a)}$, quoziente di rischi matematici, ma è preferibile assumere invece per k semplicemente un valore della forma $\sqrt{\frac{q_x}{q_a}}$, ad esempio un valore della forma $\sqrt{\frac{q_{50}}{q_{30}}}$.*

Osserviamo che nella risoluzione del suddetto problema d'interpolazione non è il caso di considerare le età all'entrata superiori a 50 anni, che sono rare in pratica, e neppure le età inferiori a 30 anni, perchè in tali età giovanili la mortalità maschile ha un andamento piuttosto irregolare.

9. Esaminiamo brevemente gli effetti di un cambiamento della tavola di mortalità o del saggio d'interesse sui valori delle percentuali γ e δ.

Se partiamo dai premi puri in base alla tavola H^M, 4 %, assumendo k il valore

$$k = \sqrt{\frac{p_{50}\, q_{50}}{p_{30}\, q_{30}}} = 1{,}4222\,,$$

si ottengono per γ e δ i seguenti valori:

$$\gamma = 0{,}03896\,;\ \delta = 0{,}001258\,.$$

Dunque: *una tavola di mortalità più elevata, e quindi indizio di un rischio maggiore, fa elevare il valore del coefficiente γ di caricamento (percentuale del premio di tariffa), in modo da ottenersi una maggiore copertura del rischio, specie per le polizze emesse nelle età più avanzate.*

Se, partendo ancora dalla detta tavola H^M, consideriamo i due saggi d'interesse del 4 % e del 5 %, ed assumiamo per k il valore.

$$k = \sqrt{\frac{p_{45}\, q_{45}}{p_{25}\, q_{25}}} = 1{,}3123\,,$$

otteniamo per γ e δ i seguenti valori:

al saggio del 4 %: $\gamma = 0{,}03800$; $\delta = 0{,}001320$;

al saggio del 5 %: $\gamma = 0{,}03959$; $\delta = 0{,}001358$.

Dunque: *se cresce il saggio d'interesse, le percentuali γ e δ aumentano.*

Ora ricordiamo che se cresce il saggio d'interesse, diminuiscono i premi, e relativamente di più nel caso dei contratti stipulati nelle età elevate. Diminuendo quindi i premi, segue che se si lasciassero le stesse percentuali di caricamento, diminuirebbe il margine disponibile per fronteggiare le spese di gestione, ed in misura relativamente più forte nel caso delle polizze emesse nelle età più elevate: tali contratti diventerebbero relativamente più rischiosi. Seguendo invece il metodo da noi indicato, si verifica un fatto notevole, che cioè quando si muta il saggio tecnico d'interesse assumendone un altro maggiore, vengono allora automaticamente ad aumentare tali coefficienti di caricamento γ e δ, in modo da aversi ancora un margine sufficiente per sopperire alle spese di gestione. Aggiungiamo che l'aumento di γ si ripercuote maggiormente sui contratti stipulati nelle età più elevate, in modo da aversi un certo compenso alla diminuzione del premio, tanto da consentire di fronteggiare ancora adeguatamente l'aggravato rischio connesso con tali contratti.

Giungiamo così alle importanti conclusioni:

1° Il problema di stabilire dei sistemi di caricamento per le varie spese, specie per quelle di gestione, non si può disgiungere dal problema della scelta delle basi demografica e finanziaria, cioè della scelta della tavola di mortalità e del saggio tecnico d'interesse, perchè una variazione di queste basi tecniche influisce sui premi e quindi anche sul rischio dei contratti.

2° La ricerca dei coefficienti di caricamento γ e δ per le spese di gestione si basa assenzialmente sulla determinazione del valore del coefficiente k, che possiamo considerare come un *indice del rischio* e sul quale vanno condotte approfondite indagini statistiche.

3° Nell'assicurazione in caso di morte per la vita intera, a premi vitalizi, sui valori dei coefficienti γ e δ ha un'influenza preponderante il valore s_0, ossia il rapporto della spesa media per ogni polizza al capitale medio assicurato (essendo γ e δ quasi proporzionali ad s_0).

4° A parità di basi tecniche, i valori possibili per k presentano un notevole grado di stabilità, aggirandosi intorno alla quantità 1,3.

V. — **Assicurazione mista a premi annui.**

10. Passiamo a considere la forma *assicurazione mista a premi annui,* nella quale il problema di stabilire dei caricamenti razionali per le spese di gestione presenta particolari difficoltà, perchè è assai facile cadere in molte contradizioni ed assurdità, come accade nei sistemi ordinariamente usati in pratica.

Lo vediamo subito, infatti, con un esempio. Supponiamo che i premi di tariffa siano quelli che risultano dal tariffario dell'Istituto nazionale delle assicurazioni (*I. N. A.*, edizione del 1933), e che i coefficienti di caricamento per le spese di gestione siano, ad esempio, il 3 % del premio di tariffa, più 1,5 ‰ del capitale assicurato. Riportiamo nel seguente prospetto il valore del margine disponibile per fronteggiare le spese di gestione, assumendo $x = 30$ anni come età all'entrata, supponendo che il capitale assicurato sia di L. 1.000 e che le durate dei contratti abbiano i valori sottoindicati (compresi tra 10 anni e 40 anni).

TABELLA III. — *Assicurazione mista a premi annui. Premi di tariffa dell' I. N. A. e caricamento per le spese di gestione. Capitale assicurato* L. 1.000, *età all'entrata* $x = 30$ *anni.*

durata	premio di tariffa	caricamento per spese di gestione
n	$1000\,\pi$	$30\,\pi + 1{,}5$
10	93,80	4,314
15	59,50	3,285
20	42,90	2,787
25	33,50	2,505
30	27,75	2,333
35	24,10	2,223
40	21,90	2,157

Si osserva subito la grande influenza che ha la durata della assicurazione sul valore del caricamento, il quale è esuberante per i contratti di breve durata ed è invece insufficiente per i contratti di lunga durata: insomma è proprio il contrario di ciò che dovrebbe essere.

È questa una grave incongruenza di un tale sistema di caricamento, poichè evidentemente i contratti di breve durata sono i meno rischiosi per la compagnia e dovrebbero perciò essere assoggettati ad un caricamento minore. E se si lasciassero gli stessi coefficienti di caricamento per le spese di gestione nelle due forme mista e vita intera, allora il caricamento nella forma mista risulterebbe maggiore che nella forma vita intera, e questo evidentemente è un assurdo, perchè la forma vita intera è la più rischiosa di tutte.

Aggiungiamo che anche se si ribassasse il coefficiente γ nella mista, riducendolo dal 3 °/₀ al 2 °/₀ del premio di tariffa, lasciando invece il 3 °/₀ nella vita intera, rimarrebbe sempre l'assurdo che, ad esempio, nel caso della durata $n = 10$ anni, il caricamento nella mista sarebbe di L. 33,76, cioè molto maggiore che nella vita intera, in cui sarebbe appena di L. 20,88. Dunque:

Nell'assicurazione mista è del tutto irrazionale un tale sistema di caricamento uniforme, cioè con percentuali γ e δ costanti, qualunque sia la durata del contratto.

In qualche tariffario si è sentito il bisogno di correggere in qualche modo l'inconveniente, introducendo, in questa forma di assicurazione, un *caricamento industriale per extramortalità*, in relazione con l'età all'entrata e con la durata del contratto. Ognuno intende subito come un tale caricamento industriale, adottato da qualche compagnia, non può avere la funzione di fronteggiare una temuta sopramortalità. Infatti la mortalità degli assicurati nella forma mista in pratica ha un andamento assai regolare e favorevole, e risulta sempre inferiore a quella che si riscontra nella vita intera (1). Dunque se non si avverte il bisogno di stabilire un caricamento industriale per extramortalità nella forma vita intera, a maggior ragione non può sorgere un tale bisogno di cautelarsi nella forma mista. Il suddetto caricamento industriale, contrariamente alle apparenze, ha dunque un'altra funzione: esso ha lo scopo di correggere, in qualche modo, le incongruenze sopra rivelate, e di fornire quindi un caricamento supplementare per fronteggiare le spese di gestione (ed il rischio), perchè il caricamento ordinario non sarebbe sufficiente, nel caso di contratti di lunga durata.

11. Consideriamo, sempre come esempio, nell'assicurazione *mista a premi annui*, il caso che i coefficienti di caricamento per le spese di gestione siano stabiliti come segue: il 2 e 1/2 per cento del premio di tariffa, più uno per mille del capitale assicurato; inoltre supponiamo che, oltre a questo primo cari-

---

(1) Vedasi il nostro lavoro: *Alcune considerazioni sulla mortalità degli assicurati dell'Istituto Nazionale delle Assicurazioni* (Atti dell'Istituto nazionale delle assicurazioni, vol. IX, 1937).

camento A, ne sia stabilito un secondo B, dipendente dall'età all'entrata x e dalla durata n del contratto, in base alla seguente formola :

$$B = 0{,}0001\ (n - 10)\ (x - 20)\ \pi_{x,\overline{n|}}\ . \tag{22}$$

Questo secondo caricamento lo consideriamo *non* come destinato a fronteggiare una sopramortalità, che in questo caso non si verifica, ma invece come un supplemento destinato a sopperire alle spese di amministrazione. Riportiamo nella seguente tabella i valori che risultano per il margine complessivo che così viene costituito per le spese di gestione, nel caso che il capitale assicurato sia di lire 1000.

TABELLA IV. — *Assicurazione mista a premi annui. Caricamento complessivo per le spese di gestione. Premi di tariffa dell'I.N.A. Capitale assicurato* L. 1000.

durata	età all'entrata	premio di tariffa	primo caricamento A	secondo caricamento B	caricamento complessivo
n	x	$1000\ \pi$	$25\pi + 1$	$0{,}1\ (n-10)\ (x-20)\pi$	$A + B$
$n = 10$	$x = 25$	93,75	3,344	0	3,344
	35	94,40	3,360	0	3,360
	45	96,90	3,423	0	3,423
	55	103,40	3,585	0	3,585
$n = 20$	$x = 25$	42,25	2,056	0,211	2,267
	35	44,15	2,104	0,662	2,766
	45	48,95	2,224	1,224	3,448
	55	61,70	2,543	2,159	4,702
$n = 30$	$x = 25$	26,60	1,665	0,266	1,931
	35	29,70	1,743	0,891	2,634
	45	37,50	1,938	1,875	3,813

Da questa tabella risulta che il valore del caricamento complessivo presenta ancora molte anomalie e assurdità e che, anche con un tale sistema di caricamento supplementare B, è ben lungi dall'essere risolto il problema di stabilire un caricamento proporzionato alla spesa (ed al rischio) della polizza. Rimangono ancora troppo elevati i margini per i contratti di breve durata, e generalmente superiori a quelli per i contratti di più lunga durata e perciò più rischiosi. Dunque:

Nella forma mista, che in pratica è la più importante, non può dirsi che sia stato sinora risolto in maniera soddisfacente il problema di sopperire alle spese di amministrazione. Occorre cercare altri criteri di caricamento, in modo da evitare gravi incongruenze nei valori del margine destinato a fronteggiare le dette spese.

Il problema si presenta particolarmente difficile, perchè il rischio dei contratti è in relazione con due elementi, l'età all'entrata e la durata, mentre i premi diminuiscono notevolmente, quando aumenta la durata. Però le considerazioni sinora svolte ci permettono già di orientarci sulla via da seguire, per la ricerca di soluzioni soddisfacenti in pratica. Sarà una via analoga a quella indicata al n. 5, nel caso della forma assicurazione vita intera a premi vitalizi.

12. Nella mista a premi annui supponiamo che il caricamento complessivo per motivi diversi dalle spese di amministrazione (cioè per le spese di acquisizione, d'incasso ed eventualmente per fronteggiare una sopramortalità) sia espresso sotto forma di una certa percentuale α del premio di tariffa $\pi_{x,\overline{n|}}$ *ogni anno*, più una certa percentuale β del capitale assicurato. Assumiamo inoltre come caricamento per le spese di gestione una percentuale γ di $\pi_{x,\overline{n|}}$ più una percentuale δ del capitale assicurato; allora, supposto che il capitale assicurato sia di una lira, ha luogo la relazione seguente, analoga alla [10], tra il premio di tariffa $\pi_{x,\overline{n|}}$ ed il premio puro $P_{x,\overline{n|}}$:

$$[23] \qquad \pi_{x,\overline{n|}} = \frac{P_{x,\overline{n|}} + \beta + \delta}{1 - \alpha - \gamma} \text{ (1)}.$$

(1) Analoga sarebbe la trattazione del caso che si stabilisse per le spese di acquisizione una certa percentuale del capitale assicurato, ovvero del premio di tariffa, ripartita su tutta la durata del contratto, ossia un caricamento della forma $\frac{\alpha}{a_{x,\overline{n|}}} C$, ovvero della forma $\frac{\alpha}{a_{x,\overline{n|}}} \pi_{x,\overline{n|}}$.

Il margine M_x destinato a fronteggiare le spese di gestione è dato dalla formola

$$[24] \qquad M_x = \gamma\, \pi_{x,\overline{n|}} + \delta\,,$$

ovvero, a causa della [23], anche dall'altra formola, in funzione del premio puro:

$$[24'] \qquad M_x = \frac{\gamma\,(P_{x,\overline{n|}} + \beta) + \delta\,(1 - \alpha)}{1 - \alpha - \gamma}\,,$$

analoga alla [11'] del n. 6.

Per la determinazione dei due coefficienti di caricamento γ e δ, imponiamo due condizioni, del tutto analoghe a quelle del n. 6, e cioè:

1° che, in corrispondenza di un certo capitale assicurato C_0, di una determinata età iniziale a e di una determinata durata n, del contratto, il caricamento $C_0\,(\gamma\, \pi_{a,\overline{n|}} + \delta)$ per le spese di gestione uguagli la spesa effettiva media S per ogni polizza;

2° che, in corrispondenza di un'altra età x e della stessa durata n il caricamento $C_0\,(\gamma\, \pi_{x,\overline{n|}} + \delta)$ uguagli il prodotto Sk, avendo indicato con k un opportuno coefficiente, sul valore del quale verranno poi compiute le opportune indagini.

Tali due condizioni, a causa della [24'], si traducono nelle seguenti equazioni per le due incognite γ e δ, in tutto analoghe alle [11] e [12]:

$$[25] \qquad C_0\, \frac{\gamma\,(P_{a,\overline{n|}} + \beta) + \delta\,(1 - \alpha)}{1 - \alpha - \gamma} = S,$$

$$[26] \qquad C_0\, \frac{\gamma\,(P_{x,\overline{n|}} + \beta) + \delta\,(1 - \alpha)}{1 - \alpha - \gamma} = Sk.$$

Osserviamo a questo proposito, che alcune compagnie assumono, per la percentuale α, dei valori variabili con la durata n del contratto, in modo che, in pratica, il rapporto $\dfrac{\alpha}{a_{x,\overline{n|}}}$ risulta presso a poco costante, in modo cioè da ricondursi, in fondo, al caso che consideriamo nel testo, che è quello che dà luogo alla formola [23].

Si è ottenuto un sistema di due equazioni di primo grado nelle incognite γ e δ; risolvendolo e chiamando brevemente con s_0 il rapporto $\frac{S}{C_0}$, si ottengono le espressioni seguenti per i due coefficienti γ e δ, analoghe alle [14] e [15]:

$$[27] \qquad \gamma = \frac{s_0\,(1-\alpha)\,(k-1)}{P_{x,\overline{n|}} - P_{a,\overline{n|}} + s_0\,(k-1)},$$

$$[28] \qquad \delta = s_0\,\frac{P_{x,\overline{n|}} - k\,P_{a,\overline{n|}}\,\beta - (k-1)}{P_{x_1\overline{n|}} - P_{a,\overline{n|}} + s_0\,(k-1)}.$$

Infine ha luogo la seguente espressione di γ in funzione di δ:

$$[29] \qquad \gamma = \frac{(s_0 - \delta)\,(1-\alpha)}{P_{a,\overline{n|}} + \beta + s_0}.$$

Sussistono delle proprietà analoghe a quelle rilevate al n. 6: *le due percentuali γ e δ sono approssimativamente proporzionali al rapporto s_0. Il coefficiente γ risulta sempre positivo, ma δ può risultare positivo o negativo. In generale, se k cresce, il valore di γ pure aumenta, ma quello di δ diminuisce. Ancora, γ è approssimativamente proporzionale alla differenza $k-1$. Infine, il coefficiente β non influisce affatto sul valore di γ, ma soltanto su quello di δ, però in misura trascurabile.*

Osserviamo che i due coefficienti γ e δ risultano dipendenti dall'età all'entrata x e dalla durata n del contratto, e possiamo indicarli, in generale, con $\gamma(x, n)$ e $\delta(x, n)$ (1). Si tratterà di esaminare se è possibile, risolvendo un problema d'interpolazione, ottenere delle espressioni semplici di γ e di δ in funzione di x e di n, in maniera che il caricamento per le spese di gestione risulti anche in certo modo legato ai rischi dei contratti.

(1) Così, nell'esempio considerato al n. precedente, nel quale il caricamento complessivo per le spese di gestione era dato dall'espresione

$$A + B = 0{,}025\,\pi_{x,\overline{n|}} + 0{,}001 + 0{,}0001\,(n-10)\,(x-20)\,\pi_{x,\overline{n|}},$$

Si è già visto che è senz'altro da escludere che le percentuali γ e δ si possano assumere costanti, per tutte le durate n, come invece è stato possibile nella forma di assicurazione vita intera.

Una prima ipotesi semplificatrice, analoga a quella adottata nella forma vita intera, è che i due coefficienti γ e δ siano indipendenti dall'età all'entrata x. Siccome il premio cresce con x, il caricamento verrà sempre a dipendere dall'età all'entrata; si tratterà poi di vedere se in maniera soddisfacente o no.

L'ipotesi più semplice che si possa formulare intorno alla forma delle due funzioni interpolatrici γ *e* δ *è che il coefficiente* δ *sia costante e che* γ *sia una funzione di primo grado della sola durata* n *dell'assicurazione.*

Se si pone $\gamma = cn + d$, con c e d coefficienti incogniti, sono allora tre le incognite da determinare, e cioè c, d e δ. Si possono escogitare molti processi d'interpolazione, per risolvere il problema che c'interessa; ma noi preferiamo esaminare più da vicino come variano in pratica i premi annui puri dell'assicurazione mista, in relazione all'età x e sopratutto alla durata n, nell'intento di cercare delle soluzioni molto semplici del problema.

13. Consideriamo i premi puri annui $\bar{P}_{x,\overline{n}|}$ dell'assicurazione mista, ottenuti in base alla tavola italiana M 1901, 4 e 1/2 %, e verifichiamo che ha luogo la seguente proprietà empirica:

Il prodotto $(n - 5)\ \bar{P}_{x,\overline{n}|}$, *al variare dell'età all'entrata* x *o della durata* n *del contratto, cresce lentamente, quando cresce l'età ovvero la durata (da 15 anni in poi), in maniera da potersi dire che a contratti verosimilmente più rischiosi corrisponde un valore più elevato del prodotto stesso.*

Riportiamo nella seguente tabella i valori di tale prodotto $(n - 5)\ \bar{P}_{x,\overline{n}|}$.

---

si erano assunte le due seguenti funzioni interpolatrici per γ e δ:

$$\gamma = 0{,}025 + 0{,}0001\ (n - 10)\ (x - 20)\ ;\ \delta = 0{,}001\ ,$$

le quali però, come si è già detto, non risolvono in pratica il problema proposto.

TABELLA V. — *Assicurazione mista a premi annui. Valori del prodotto* $(n - 5)\overline{P}_{x,\overline{n}|}$. *Tavola italiana M* 1901, 4 *e* 1/2 %. *Capitale assicurato* L. 1000.

durata	età all'entrata				
n	20	30	40	50	60
10	407 —	407,40	414,70	431,80	484,90
15	499,30	502 —	520,70	566,80	707,90
20	520,60	528,30	563,50	654,90	921,50
25	520,20	535,90	595,20	750,80	1.169,20
30	514,70	542 —	635,60	872,80	1.444,80
35	511,30	555,30	693,90	1.020,50	1.730,90
40	513,90	580,90	773,10	1.183,40	2.019,10
45	525,20	621,60	869,10	1.351,40	—
50	547,20	677,70	974 —	1.520,10	—

Si constata dunque che il prodotto $(n - 5)\overline{P}_{x,\overline{n}|}$ varia assumendo valori leggermente crescenti, se cresce l'età all'entrata x ovvero la durata n. Le variazioni sono più accentuate se l'età all'entrata supera 40 anni, e sono forti se l'età all'entrata raggiunge i 60 anni. Non si riscontrano incongruenze o irregolarità di andamento (1), ed è molto interessante il fatto che i valori del prodotto $(n - 5)\overline{P}_{x,\overline{n}|}$ si mantengono, proporzionalmente, di un ordine di grandezza che è bene in armonia con quello del margine per le spese di gestione nella forma *vita intera*, secondo il tipo III di caricamento considerato al n. 3, che è il tipo che più si accosta a quelli usati in pratica (vedansi i valori riportati nella tabella I del n. 3).

Viene allora in mente di assumere il prodotto $(n - 5)P_{x,\overline{n}|}$ *come un indice del rischio dei vari contratti di assicurazione mista*, e di porre in relazione ad esso il caricamento per le spese di gestione, tenendo presente che l'influenza di un tale elemento

(1) Veramente per l'età all'entrata di 20 anni (in generale per le età giovanili) si riscontra una lieve irregolarità, dipendente dal fatto che la mortalità in tali anni (specie la maschile) presenta, sia pure in lieve misura, l'anomalia di non essere sempre crescente.

verrà più o meno attenuata dall'influenza dell'altro coefficiente δ, che è costante per tutte le polizze.

Assumiamo allora, nell'assicurazione mista a premi annui, il coefficiente di caricamento γ *pari ad una funzione lineare di* n*, della forma*

$$[30] \qquad \gamma_n = c(n-5),$$

e quindi assumiamo come caricamento complessivo per fronteggiare le spese di gestione, un'espressione del tipo

$$[31] \qquad c(n-5)\pi_{x,\overline{n|}} + \delta .$$

Il premio di tariffa $\pi_{x,\overline{n|}}$ *avrà la seguente espressione, in funzione del premio puro :*

$$[32] \qquad \pi_{x,\overline{n|}} = \frac{P_{x,\overline{n|}} + \beta + \delta}{1 - \alpha - c(n-5)},$$

ed il margine M_x *destinato a fronteggiare le spese di gestione risulterà della forma :*

$$[33] \qquad M_x = \frac{c(n-5)\,(P_{x,\overline{n|}} + \beta)\,(1-\alpha)}{1 - \alpha - c(n-5)} .$$

Per la determinazione dei due coefficienti costanti c *e* δ*, una volta stabiliti i valori delle quantità* s_0, α, β, k, a, x, n, *ci varremo ancora delle due relazioni* [27] *e* [28]*; precisamente dalla* [27] *si otterrà* γ_n *e indi si otterrà* c *dalla relazione*

$$[34] \qquad c = \frac{\gamma_n}{n-5}$$

e dalla [28] *si otterrà direttamente* δ.

14. Come esempio, supponiamo che la tavola di mortalità sia la *M* 1901 (di popolazione generale maschile italiana), e che il tasso tecnico d'interesse sia il 4 e 1/2 %. Supponiamo che il caricamento per le spese di acquisizione dei contratti sia il 5 % del

premio di tariffa $\pi_{x,\overline{n}|}$ ogni anno e quello per le spese d'incasso sia il 3 % di $\pi_{x,\overline{n}|}$; sarà dunque $\alpha = 0{,}08$ e $\delta = 0$ (n. 8). Partendo dalle due età all'entrata $a = 30$ e $x = 50$ anni e dalla durata di 20 anni, assumiamo il coefficiente k pari al valore 1,15 e poniamo la condizione che per il capitale assicurato di L. 15.000 il margine per le spese di gestione debba risultare pari a L. 30, ciò che equivale a porre $s_0 = 30 : 15.000 = 0{,}002$. Siccome si ha

$$\overline{P}_{30,\overline{20}|} = 0{,}035219\,;\ \overline{P}_{50,\overline{20}|} = 0{,}043659,$$

allora dalle [27] e [28] si deducono per i coefficienti γ_{20} e δ i seguenti valori:

$$\gamma_{20} = 0{,}0315789\,;\ \delta = 0{,}000722426,$$

e dalla [34] si deduce il valore di $c = \gamma_{20} : 15 = 0{,}00210526$. Dunque:

In base alle ipotesi formulate, nell'assicurazione mista a premi annui si avrebbe, come caricamento complessivo per le spese di gestione, il seguente margine per il capitale assicurato unitario:

$$M_x = 0{,}00210526\,(n - 5)\,\pi_{x,\overline{n}|} + 0{,}000722426,$$

Così, se la durata n del contratto è uguale a 15 anni, sarà

$$M_x = 0{,}0211\,\pi_{x,\overline{15}|} + 0{,}00072\,;$$

se la durata $n = 20$ anni, sarà

$$M_x = 0{,}0316\,\pi_{x,\overline{20}|} + 0{,}00072\,;$$

se la durata $n = 30$ anni, sarà

$$M_x = 0{,}0521\,\pi_{x,\overline{30}|} + 0{,}00072,$$

e così via.

Se, ferme restando tutte le altre ipotesi, poniamo invece il coefficiente $k = 1{,}1$, allora abbiamo i seguenti valori:

$$\gamma_{20} = 0{,}0212963\,;\ \delta = 0{,}00113842\,;\ c = \gamma_{20} : 15 = 0{,}00141975.$$

In ogni caso il coefficiente k deve assumere valori notevolmente minori di quelli che assume nella forma vita intera, perchè nella forma mista l'età all'entrata influisce assai meno sui valori dei premi. Comunque, sta il fatto che se nella mista si assumesse per k un valore come, ad esempio, 1,3 , cioè dello stesso ordine di grandezza che nella vita intera, allora risulterebbe per δ un valore negativo, mentre γ_{20} risulterebbe intorno a 0,06, valori che in pratica non sembrano consigliabili.

15. Può essere anche opportuno, in pratica, prestabilire il valore del coefficiente δ e determinare in conseguenza il valore di γ_n, imponendo la sola condizione che, in corrispondenza ad una determinata età a e durata n, il caricamento per le spese di gestione uguagli una cifra prestabilita. Ciò equivale ad imporre la sola prima equazione [25], dalla quale risulta l'espressione [37] di γ_n in funzione di δ.

Così, ad esempio, nelle stesse ipotesi precedenti, se si pone $\delta = 0{,}001$, si ottiene dalla [37] per γ_{20} il seguente valore: $\gamma_{20} = 0{,}024778$, ossia circa il 2 e 1/2 °/₀.

Allora, sempre a titolo di esemplificazione, stabiliamo i seguenti valori per i coefficienti di caricamento:

$$\gamma_{20} = 0{,}025 \, ; \; \delta = 0{,}001 \, ; \; c = \gamma_{20} : 15 = 0{,}005 : 3 = 0{,}0016666.$$

Abbiamo allora, per il premio di tariffa, l'espressione

$$[35] \quad \pi_{x,\overline{n|}} = \frac{\overline{P}_{x,\overline{n|}} + 0{,}001}{0{,}92 - 0{,}0016666\,(n-5)} = \frac{3\,(\overline{P}_{x,\overline{n|}} + 0{,}001)}{2{,}76 - 0{,}005\,(n-5)},$$

e per il margine M_x destinato a sopperire alle spese di gestione, la formola

$$[36] \qquad M_x = \frac{0{,}0016666\,(n-5)\,\overline{P}_{x,\overline{n|}} + 0{,}00092}{0{,}92 - 0{,}0016666\,(n-5)} =$$

$$= \frac{0{,}005\,(n-5)\,\overline{P}_{x,\overline{n|}} + 0{,}00276}{2{,}76 - 0{,}005\,(n-5)}$$

(avendo moltiplicato per 3 il numeratore e il denominatore).

Supposto che il capitale assicurato sia di L. 1000, abbiamo allora i valori del carimento che riportiamo nella seguente tabella, in corrispondenza dei valori sottoindicati di n e di x.

TABELLA VI. — *Assicurazione mista a premi annui. Caricamento per le spese di gestione. Tavola italiana M* 1901, 4 e 1/2 %. *Capitale assicurato* Lire 1000. *Coefficienti di caricamento :* $\alpha = 0{,}08$; $\beta = 0$; $c = 0{,}025 : 15 = 0{,}0016666$; $\gamma_n = 0{,}025\ (n - 5) : 15$; $\delta = 0{,}001$.

durata	valori di	valori di	margine M_x per le spese di gestione				
			età all'entrata				
n	$\gamma_n = \frac{0{,}025}{15}(n-5)$	$2{,}76 - 0{,}005\,(n-5)$	20	30	40	50	60
10	0,008333	2,735	1,7532	1,7539	1,7675	1,7985	1,8958
15	0,016666	2,71	1,9399	1,9446	1,9793	2,0642	2,3247
20	0,025	2,685	1,9974	2,0119	2,0775	2,2477	2,7441
25	0,033333	2,66	2,0154	2,0451	2,1564	2,4489	3,2353
30	0,041666	2,635	2,0243	2,0759	2,2535	2,7036	3,7890
35	0,05	2,61	2,0372	2,1215	2,3870	3,0125	4,3734
40	0,058333	2,585	2,0619	2,1915	2,5632	3,3567	4,9731
45	0,066666	2,56	2,1039	2,2922	2,7756	3,7176	—
50	0,075	2,535	2,1680	2,4256	3,0099	4,0870	—

Nella tabella che segue si è assunto invece il capitale assicurato pari a L. 15.000.

TABELLA VII. — *Analoga alla tabella precedente. Capitale assicurato* L. 15.000.

durata	margine M_x per le spese di gestione				
	età all'entrata				
n	20	30	40	50	60
10	26,298	26,309	26,512	26,978	28,437
15	29,098	29,170	29,690	30,963	34,871
20	29,961	30,179	31,162	33,715	41,162
25	30,231	30,677	32,346	36,733	48,530
30	30,364	31,139	33,803	40,554	56,835
35	30,557	31,822	35,805	45,187	65,601
40	30,928	32,872	38,449	50,350	74,597
45	31,559	34,383	41,634	55,764	—
50	32,521	36,385	45,148	61,305	—

Si osserva dalle precedenti tabelle che il margine M_x per fronteggiare le spese di gestione ha un andamento che presenta un carattere di notevole regolarità, contrariamente a quello che accade coi sistemi di caricamento comunemente adottati in pratica nell'assicurazione mista. *I valori del margine M_x crescono regolarmente con la durata n del contratto e con l'età all'entrata x, e quindi crescono insieme col rischio dei contratto.* Specialmente per le età sino a 40 anni e le durate fino a 25 anni, che sono quelle che maggiormente interessano in pratica, il margine M_x varia ben poco intorno al suo valor medio. Per le età più elevate e le durate più lunghe il margine cresce notevolmente, in armonia col fatto che tali contratti sono molto più rischiosi per la compagnia assicuratrice.

Osserviamo che se si assumesse invece il caricamento corrispondente alla durata di 20 anni pari al 2 *per cento del premio di tariffa, più* 1,2 *per mille del capitale assicurato,* ossia se si assumesse

$$\gamma_{20} = 0{,}02\,;\; c = 0{,}02:15 = 0{,}001333\,;\; \delta = 0{,}0012,$$

allora il margine M_x, pur conservando la caratteristica di essere crescente col rischio e conservando il suo livello medio, varierebbe tra limiti più ravvicinati tra loro, come se venisse attribuito un peso minore al rischio dei contratti. Infatti il valore di M_x relativo all'età all'entrata di 30 anni ed alla durata di 20 anni rimane pressochè inalterato (sarebbe 30,140, invece di 30,179), però il margine corrispondente all'età all'entrata di 60 anni varierebbe tra i seguenti limiti: 28,750 e 66,212 (anzichè tra 28,437 e 74,597, come nel caso della tabella VI).

Dunque:

Una soluzione del genere da noi proposto, col caricamento M_x per le spese di gestione dato da una formola del tipo [31] *o* [33], *sembra costituire un buon assetto del complesso problema d'interpolazione che ci siamo posti. Ed è possibile variare i valori dei coefficienti c e δ in modo da mantenere un dato livello medio del margine M_x e da accentuare ovvero ridurre le divergenze tra i suoi valori corrispondenti alle diverse età all'entrata e alle diverse* *durate, secondochè si voglia attribuire un peso maggiore o minore al rischio dei contratti, in relazione all'età all'entrata x e alla durata n del contratto.*

16. Poniamo infine a raffronto i caricamenti ottenuti nella mistacon quelli della forma *vita intera* a premi annui, assumendo le stesse percentuali γ e δ della forma mista che corrispondono, ad esempio, alla durata di 40 anni. Siccome dalla tabella VI risulta che il valore di γ corrispondente alla durata di 40 anni è 0,058333, assumiamo i seguenti valori nella forma vita intera: $\gamma = 0{,}06$ e $\delta = 0{,}001$. Partendo allora dai premi puri $\bar{P}_x$ secondo la tavola *M* 1901, 4 e 1/2 %₀ e ponendo $\alpha = 0{,}08$; $\beta = 0$ ed il capitale assicurato pari a L. 15.000, si ottengono, per il margine M_x destinato a fronteggiare le spese di gestione, i valori che riportiamo nella seguente tabella.

Tabella VIII. — *Assicurazione vita intera a premi vitalizi. Caricamento per le spese di gestione. Tavola italiana M* 1901, 4 *e* 1/2 %. *Capitale assicurato* L. 15.000. *Coefficienti :* $\alpha = 0{,}08$; $\beta = 0$; $\gamma = 0{,}06$; $\delta = 0{,}001$.

età all'entrata	margine per le spese di gestione
20	27,808
30	31,569
40	38,685
50	51,399
60	76,419

I margini ottenuti per la vita intera risultano abbastanza in armonia con quelli della mista; però, specialmente per i contratti stipulati nelle età elevate, essi risultano notevolmente più alti di quelli ottenuti secondo il tipo III di caricamento, considerato ai nn. 3 e 4, in conseguenza del fatto che per il coefficiente γ si è assunto un valore doppio. Ciò dimostra che verosimilmente i margini della vita intera comunemente adottati in pratica sono troppo bassi per le età anziane, e che tali contratti sono troppo rischiosi per le compagnie assicuratrici. Discende da queste semplici considerazioni la necessità di coordinare sempre tra loro i vari sistemi di caricamento che si adottano per le diverse forme di assicurazione.

VI. — **Conclusioni.**

17. Le conclusioni che si traggono da questo studio le riteniamo interessanti, perchè pongono in una nuova luce molti problemi della tecnica attuariale.

Il margine destinato a sopperire alle spese di amministrazione non corrisponde in pratica alla spesa realmente sostenuta per ogni singola polizza; esso varia molto, in dipendenza dei seguenti tre elementi: *capitale assicurato, età* dell'assicurato alla stipulazione del contratto, *durata* e modalità di pagamento dei premi. Ma questi (oltre al numero dei contratti raccolti) sono anche in fondo gli elementi che influiscono sul rischio che la compagnia assicuratrice deve affrontare per il contratto che si considera, e non vi è dubbio che le soluzioni empiriche sinora adottate per determinare detto caricamento pongono effettivamente il valore del margine in una certa relazione col rischio presumibile del contratto, anche se in una maniera imperfetta, e, saremmo per dire, senza volerlo. Finora l'empirismo ha ottenuto di più della teoria matematica del rischio.

È evidente che soluzioni razionalmente pertette del problema sono impossibili, principalmente per due motivi, a causa della grande difficoltà di determinare un preciso elemento che si possa assumere come un *numero indice del rischio*, ed a motivo della *grande influenza del capitale assicurato sull'entità del margine*: basta riflettere che se il capitale assicurato raddoppia, allora pure il margine disponibile raddoppia, ma non è mica detto che la spesa effettiva per la polizza sia raddoppiata nè, tanto meno, che sia raddoppiato il rischio del contratto.

Una volta entrati nell'ordine d'idee di stabilire in relazione al rischio il caricamento per le spese di amministrazione, allora il *problema va posto sulle seguenti basi: cercare delle soluzioni, possibilmente semplici, tali che:*

1° *una polizza con determinate caratteristiche debba bastare a sè stessa, cioè il margine corrispondente debba uguagliare la spesa media per ogni tale polizza;*

2° *a rischi crescenti debbano corrispondere margini crescenti in modo che siano evitate contradizioni ed irregolarità di andamento;*

3° *le soluzioni relative a forme diverse di assicurazioni siano poste in armonia tra loro;*

4° *si abbia di mira la ricerca di soluzioni medie, in modo che non sia compromesso l'equilibrio tra caricamento globale e spese complessive, e che sia attribuito un maggior peso ai contratti più frequentemente stipulati, cioè alle età e alle durate che più frequentemente si riscontrano in pratica;*

5° *si tenga presente che il problema di stabilire il caricamento per le spese di gestione è strettamente legato al problema della scelta della tavola di mortalità e del saggio tecnico d'interesse. Un cambiamento di tali basi tecniche sconvolge i valori dei margini stabiliti ed influisce anche sui rischi della compagnia.*

Occorrerebbe naturalmente compiere accurate indagini statistiche sulle forme e sul numero dei contratti raccolti annualmente e sul loro decorso nel tempo, secondo l'età all'entrata, la durata ed il capitale assicurato, ed inoltre delle indagini per la ricerca di un elemento che si possa assumere come indice del rischio dei contratti, necessario per la determinazione dei coefficienti di caricamento, i quali verranno calcolati in modo che il margine risulti approssimativamente proporzionale a tale numero indice, se non vi sono motivi in contrario.

Un tale indice potrà desumersi, forse più che da considerazioni teoriche, da indagini rivolte specialmente alla determinazione degli utili di mortalità nelle varie categorie di contratti e delle divergenze tra la mortalità teorica e quella effettiva, e possibilmente anche sugli effetti della selezione e sul particolare decorso dei contratti emessi per capitali elevati. Siamo convinti che studi sistematici diretti a questo fine daranno in pratica risultati di grande importanza, e potranno eventualmente confermare i risultati di ordine generale esposti in questo lavoro.

Nella forma di assicurazione *vita intera* l'assumere un'espressione del caricamento per le spese di gestione del tipo $\gamma\pi_x + \delta$ significa che in fondo viene considerato il premio come un indice del rischio del contratto, perchè i premi sono crescenti, col crescere dell'età all'entrata. L'influenza di tale indice viene poi più o meno attenuata dall'influenza del secondo termine δ, che ha un valore costante per tutte le polizze. I valori dei due coefficienti γ e δ si possono desumere, imponendo due condizioni come quelle poste al n. 6, per poter tener conto dell'influenza del capitale assicurato e dell'età all'entrata.

Nell'assicurazione *mista*, ed in generale nelle assicurazioni a premi temporanei, non si può assumere un caricamento per le spese di gestione dello stesso tipo della vita intera, per il fatto che non si può assumere il premio come un indice del rischio, perchè i premi vanno diminuendo, quando cresce la durata del loro pagamento, mentre il rischio del contratto va invece crescendo. In ciò sta l'errore commesso in pratica coi sistemi comunemente adottati di caricamento, nel non tener conto cioè adeguatamente dell'influenza dell'elemento *durata*.

In questo lavoro abbiamo suggerito di assumere come indice del rischio di un contratto nell'assicurazione mista il prodotto $(n-5)\pi_{x,\overline{n}|}$, e come caricamento per le spese di amministrazione un'espressione del tipo

$$c\,(n-5)\,\pi_{x,\overline{n}|} + \delta\ ,$$

avendo indicato con $\pi_{x,\overline{n}|}$ il premio annuo di tariffa e con n la durata del contratto. In questo modo *il caricamento risulta crescente col rischio del contratto.* L'influenza del detto indice viene più o meno attenuata dal secondo termine δ, che ha un valore costante per tutte le polizze. I valori dei due coefficienti c e δ si possono desumere, imponendo due condizioni come quelle poste al n. 11, per potere tenere conto dell'influenza del capitale assicurato e dell'età all'entrata.

Un'impostazione come quella che si è data in questo lavoro del complesso problema del calcolo delle tariffe nell'assicurazione vita riteniamo che costituisca un apprezzabile contributo, e potrà essere ulteriormente approfondita e sviluppata, secondo i risultati che si avranno, in seguito al vaglio dell'esperienza.

SULLE VARIAZIONI DELLA MORTALITÀ DEGLI ASSICURATI

PROF. RAFFAELE CULTRERA
Capo Servizio dell'I.N.A.

È noto come l'andamento della mortalità degli assicurati sia uno dei fenomeni che il tecnico di una impresa assicuratrice deve seguire attentamente perchè, essendo la mortalità uno degli elementi fondamentali sui quali si basano le valutazioni attuariali, è necessario che egli conosca quanto, in un dato periodo, le ipotesi su di essa rispondano alla realtà dei fatti. S'intende che non si possa pretendere che la mortalità riscontrata sia perfettamente aderente a quella prevista, che anzi in qualche caso ciò non si desidera poichè, se non si vuol ricorrere a caricamenti espliciti, la mortalità che si assume a base dai calcoli attuariali, per ovvi criteri di prudenza, deve differire da quella prevedibile, in senso favorevole all'impresa. È necessario però osservare gli scarti che si verificano, poichè ad un dato momento può presentarsi il problema di aggiornare le basi demografiche delle valutazioni attuariali, in quanto quelle a suo tempo assunte non rispondono più allo scopo. Quando questo momento sia giunto, non è facile cosa potere asserire, poichè molti altri elementi interferiscono a determinare la situazione finanziaria di un'impresa; in modo che può tavolta non ritenersi opportuno procedere al cambiamento delle basi, laddove in altre contingenze si riterrebbe necessario farlo.

In ogni caso, è indispensabile che l'attuario in primo luogo ricerchi le cause del diverso comportamento della mortalità al fine di stabilire quali fra esse siano da prendere in considerazione per la previsione della mortalità futura; ed in secondo luogo, è indispensabile che egli sia in grado di valutare le influenze che certe variazioni della mortalità hanno sulla determinazione dei premi delle riserve matematiche, degli utili, ecc.

1. — Per il primo quesito, devesi distinguere se l'impresa si serva per i suoi calcoli attuariali di tavole dedotte dalla propria esperienza o di tavole di popolazione generale e, nel primo caso, se dette tavole sono selezionate o aggregate. Difatti, in periodi di produzione crescente una rilevazione della mortalità degli assicurati che non tenesse conto del periodo di appartenenza al gruppo, darebbe dei tassi inferiori a quelli previsti, non per un effettivo miglioramento nella mortalità, bensì per una diversa composizione del gruppo di assicurati, prevalendo in esso i nuovi che evidentemente, per effetto della selezione medica, presentano una minore mortalità.

Per lo stesso motivo, potrebbe essere portato ad illazioni erronee chi confrontasse una tavola di mortalità degli assicurati con quella di una popolazione generale, poichè troverebbe diversi comportamenti a seconda delle età, e cioè un'abbassamento, nelle età più frequenti di ingresso in assicurazione, che diminuisce e talvolta si annulla o cambia senso col progredire dell'età e quindi della antidurata media di assicurazione.

È certo che un'impresa che potesse disporre di tavole selezionate dedotte dalla propria esperienza, correrebbe minore rischio di essere costretta ad aggiornare dette tavole poichè gli scarti che andrebbe a riscontrare sarebbero d'ordinario compresi entro limiti relativamente modesti, a meno che non dovessero intervenire varianti profonde nei criteri di accettazione dei rischi. Ma alla costruzione di una tavola selezionata che possa dirsi attendibile, si oppone in genere la limitatezza del materiale statistico; donde il rischio di presumere una maggiore precisione laddove ne esiste meno, per la scarsezza del numero delle osservazioni. Per ovviare a questo inconveniente, e quando si ritenga di essere pervenuti ad uno stato di regime nella composizione del portafoglio, si può ricorrere alla tavola aggregata; ed ancora questa, rispetto alla tavola di popolazione generale, presenta il vantaggio di una maggiore stabilità; in quanto gli assicurati costituiscono rispetto alla popolazione generale un gruppo più progredito e, in certo modo, più omogeneo; e pertanto le oscillazioni dei tassi di mortalità di questi risultano inferiori a quelle dei tassi di mortalità della popolazione generale. Ciò, del resto, è confermato dai dati che seguono.

TAVOLA I. — *Confronto nel tempo tra tassi di mortalità della popolazione generale e tassi di mortatità di assicurati secondo l'età* ($q_x \cdot 10^3$).

ETÀ	INGHILTERRA						ITALIA					
	Popolaz. maschile			Assicurati			Popolaz. maschile			Assicurati I.N.A.		
	1871-80 (a)	1930-32 (b)	(1)-(2)	O[M] 1863-93 (c)	A 1924-29 (d)	(4)-(5)	1921-22 (e)	1930-32 (f)	$\frac{(7)-(8)}{10}$	1927-31 (g)	1932-36 (h)	$\frac{(10)-(11)}{5}$
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)
30	9,39	3,40	5,99	7,57	2,41	5,16	5,54	4,66	0,088	3,22	3,09	0,026
35	11,28	4,21	7,07	8,46	2,86	5,60	5,90	5,30	0,060	3,75	3,61	0,028
40	13,89	5,62	8,27	9,86	3,88	5,98	6,75	6,36	0,039	4,97	4,76	0,040
45	16,60	7,99	8,61	12,05	5,27	6,78	8,44	7,94	0,050	6,52	6,47	0,010
50	20,39	11,28	9,11	15,46	7,64	7.82	11,18	10,63	0,055	9,78	9,56	0,044
55	26,67	16,14	10,53	20,79	11,90	8,89	15,40	14,68	0,072	14,83	14,27	0,110
60	35,45	24,15	11,30	29,07	19,73	9,34	—	—	—	—	—	—
65	46,86	37,91	10,95	41,92	31,88	10,04	—	—	—	—	—	—
70	69,88	60,35	9,53	61,69	53,27	8,42	—	—	—	—	—	—

(*a*) *Supplement to the 65° Annual Report of the Registrar General of births, deaths and marriages, in England and Wales 1891-1900*, Part. I, London, 1907, p. XLVIII.

(*b*) *The Registrar General's decennial Supplement, in England and Wales*, 1931, Part. 1, London, 1936.

(*c*) *British Offices Life Tables* (1893), *Select Tables* (*graduated Experience*), London, 1907, p. 24.

(*d*) *Continuous Investigation into the mortality of Assured Lives* (A. 1924-29), Monetary Tables, vol. I, London, 1934, pag. XXXVIII.

(*e*) C. Gini e L. Galvani, *Tavole di mortalità della popolazione italiana*, in « Annali di statistica », serie VI, vol. VIII, Roma, 1931.

(*f*) L. Galvani, *Tavole di mortalità della popolazione italiana 1930-1932*, in « Annali di statistica », serie VII, vol. I, Roma, 1937-XV.

(*g*) *Relazione sull'andamento della gestione nel quinquennio 1927-31*, Istituto nazionale delle assicurazioni, Roma, 1932-X.

(*h*) *Relazione sull'andamento della gestione nel quinquennio 1932-36*, Istituto nazionale delle assicurazioni, Roma, 1938-XVI.

Riteniamo opportuno far rilevare come i tassi della colonna (4) si riferiscano ad assicurati con più di 10 anni di assicurazione; quelli della colonna (5), ad assicurati con più di tre anni di assicurazione, per cui le cifre delle due colonne non sono perfettamente comparabili; e però, si può ritenere le differenze della colonna (6) sarebbero minori ove i tassi a cui si riferiscono fossero relativi ad assicurati tutti con 10 anni ovvero con 3 anni di assicurazione. Per quanto riguarda l'Italia, data la notevole diversità della lunghezza del periodo che intercorre tra le due tavole della popolazione generale e quelle degli assicurati, abbiamo calcolato, nelle colonne (9) e (12), il decremento medio annuo dei tassi di mortalità anzichè quello totale, supponendo che quest'ultimo, si sia verificato in 10 anni per la popolazione gererale e in 5 anni per gli assicurati.

2. — Dell'andamento della mortalità delle popolazioni generali si hanno normalmente misure più sicure ed estese che non dell'andamento della mortalità degli assicurati; lo studio di tale andamento attrae da tempo l'attenzione dei demografi sia perchè riguarda una delle cause principali del movimento naturale della popolazione sia perchè sulla conoscenza di esso si può fondare, in parte, la previsione dello sviluppo futuro della popopolazione (1). In Italia, come è noto, allo scopo anzitutto di rendere leciti i confronti nel tempo tra una tavola di mortalità e l'altra, sono state ricostruite con criteri uniformi, in occasione della costruzione delle tavole 1921-22, le prime tre tavole di mortalità 1881-82, 1899-902, 1910-12 (2).

Un esteso studio demografico dell'andamento della mortalità in Italia basato su tali tavole, comparato con quello relativo ad altri paesi, è stato condotto pochi anni fa dal GALVANI (3). Con

---

(1) C. GINI e B. DE FINETTI, *Calcoli sullo sviluppo futuro della popolazione italiana,* in «Annali di statistica», serie VI, vol. X, Roma, 1931-X.

(2) C. GINI e L. GALVANI, *Tavole di mortalità della popolazione italiana,* in «Annali di statistica», serie VI, vol. VIII, Roma X.

(3) L. GALVANI, *Diminuzione della mortalità in alcuni Stati,* in Atti del Congresso internazionale per gli studi della popolazione, Roma, 1933-XII.

fine più strettamente attuariale, invece, sono state compiute, rispettivamente per la popolazione svedese e germanica, le ricerche recenti del CRAMER (1) e del RIEBESELL (2), tendenti a rappresentare i tassi di mortalità della popolazione in funzione dell'età raggiunta e dell'epoca in cui si raggiungono certe età; o dell'età raggiunta e dell'anno in cui si inizia una certa generazione. I risultati conseguiti da questi due autori, sono concordi su un punto molto interessante; precisamente: dovendo fare una previsione dell'andamento futuro della mortalità per le età che più interessano l'assicurazione (30-90 anni), si può ritenere come molto attendibile, per un certo tempo ancora, una ulteriore costante e piuttosto lieve decrescenza nei tassi istantanei di mortalità, *indipentemente dall'età raggiunta.* Sembrerebbe che, in vicinanza del minimo raggiungibile dai tassi di mortalità, minimo che non dovrebbe essere lontano, i miglioramenti successivi si conseguano, entro certi limiti indipendentemente dall'età. Ciò può apparire del resto piuttosto plausibile. Anche in Italia, per le classi centrali di età, si può con una certa approssimazione ammettere che in questo ultimo decennio ci sia stata una riduzione quasi costante nei tassi istantanei di mortalità (3). Questa constatazione della semplicità della forma dell'andamento della mortalità nel tempo facilita grandemente la previsione futura; non solo, ma facilita, ciò che a noi più interessa in questo momento, la valutazione degli effetti delle variazioni della mortalità sui vari computi attuariali. Infatti, è noto come ad una variazione costante indipendente dall'età, del saggio istantaneo di mortalità, si possa far corrispondere nel caso continuo dell'annualità vitalizia, una identica variazione nel saggio istantaneo

---

(1) H. CRAMÈR and K. WOLD, *Mortality Variations in Sweden, A Study in Graduation and Forecasting,* « Skandinavisk Aktuarietidskrift », 1935.

(2) P. RIEBESELL, *Eine zukünftige deutsche Sterbetafel* (*Ein Beitrag zur Dynamik der Lebensversicherungsmathematik*), « Blätter fur Versicherungs-Mathematik und verwandte Gebiete », Band 4, Heft 7, Oktober 1938.

(3) P. MAZZONI, prefazione alle *Tavole attuariali italiane 1931,* R. Università degli Studi di Bari, Bari, A. XVII.

di interesse. Infatti, se Σ è l'incremento subito dal tasso istantaneo di mortalità, si ha:

$$\bar{a}_x = \int_0^{\omega - x} e^{-\int_0^t (\mu_{x+\tau} + \varepsilon)\, d\tau}\, e^{-\delta t}\, dt = \int_0^{\omega - x} e^{-\int_0^t \mu_{x+\tau}\, d\tau}\, e^{-(\delta+\varepsilon)\, t}\, dt$$

Una volta assimilata la variazione costante della mortalità ad una variazione nel saggio di interesse, è evidente come sia conveniente utilizzare i risultati che si sono raggiunti nello studio delle influenze delle variazioni del saggio d'interesse (1).

Anzitutto si potrebbe esaminare, supposto che nel futuro prossimo si possa verificare ancora una certa diminuzione, per tutte le età, nei tassi istantanei di mortalità, quali possano essere le influenze che tale supposta diminuzione può arrecare sui valori attuali medi delle annualità, in modo da trarre successivamente un giudizio sulle influenze che subiscono gli ammontari dei premi e delle riserve matematiche delle varie forme assicurative. Ciò, come è ovvio, si potrebbe vedere in modo abbastanza spedito. E però, un altro problema in un certo qual modo più urgente, nel caso che nelle valutazioni di bilancio si adotti una tavola di mortalità della popolazione generale un po' antiquata, e ove una più recente tavola presenti saggi istantanei di mortalità che differiscano in misura poco variabile da quelli desumibili dalla prima tavola, potrebbe essere quello di esaminare, supposta avvenuta la sostituzione delle tavole, a quale saggio d'interesse si debbono considerare valutate le riserve e se esso tasso risulti sufficientemente cautelativo; e, qualora non risulti tale, stabilire l'incremento che dovrebbero subire le riserve matematiche per adeguarsi alla nuova tavola di mortalità lasciando invariato il saggio d'interesse teorico.

Un'idea dei risultati che si possono raggiungere in questo genere di ricerca, si può avere dall'applicazione seguente.

Osservato come nel passaggio dalla tavola di mortalità della

(1) Comunicazioni sul tema II, Vol. I degli « Atti dell'XI° Congresso internazionale degli attuari ». Parigi, 1937.

popolazione maschile del Regno del 1899-902 a quella 1930-32, risulti, per i tassi istantanei di mortalità tra le età 30 e 60, una diminuzione non molto variabile, si può cercare di stabilire, mediante una formula approssimata di facile applicazione (1), a quale riduzione di tasso d'interesse si può far corrispondere, nel computo delle riserve matematiche, la riduzione di mortalità che si verifica tra la vecchia e la nuova tavola.

Se ci limitiamo al caso della « mista » (durata n anni), possiamo ricorrere alla seguente formula che ci dà approssimativamente il rapporto tra riserve matematiche dopo t anni ai saggi istantanei δ e δ' rispettivamente, nel caso che sia valida la legge gomperziana di sopravvivenza:

$$[1] \quad \frac{{}_tV_{x,\overline{n|}}}{{}_tV'_{x,\overline{n|}}} \sim \left[1 - \frac{1}{2}(n-t)(\delta-\delta') - \frac{1}{24}(n^2-t^2)(\delta^2-\delta'^2)\right] \left[1 - \frac{n-t}{2t}\, n\,(\delta-\delta')\, c^x \left(c^{\frac{t}{2}}-1\right)\left(c^{\frac{n-1}{2}} - c^{\frac{t}{2}} - 1\right)\log g\right].$$

Il secondo fattore tra parentesi quadre, del 2⁰ membro della precedente espressione, può essere anche trascurato in considerazione del grado di approssimazione che si introduce con l'ipotesi della riduzione costante del saggio istantaneo di mortalità.

Se ora al primo membro della [1] si fa corrispondere anzichè il rapporto tra riserve ad un diverso saggio d'interesse, il rapporto tra la riserva calcolata in base alla tavola 1930-1932 e la riserva in base alla tavola 1899-1902, entrambe allo stesso tasso d'interesse δ', si può cercare, per successivi tentativi, limitatamente ad alcuni valori di x e di n e quindi di t, quale sia il valore di δ che meglio soddisfa la nuova approssimazione [1]. Allorchè si prenda $\delta' = 0{,}0392$, si trova che, per certe età e durate, un valore soddisfacente di δ potrebbe essere 0,0377, come appare dalla seguente tavola, dove nella colonna (1) si sono po-

(1) R. Cultrera, *Sull'influenza della variazione del tasso d'interesse sull'ammontare della riserva matematica*, Atti dell'XI$^{\circ}$ Congresso internazionale degli attuari, Parigi, 1937.

sti i valori del 1^0 membro della [1], inteso come rapporto di riserve in base alle due diverse tavole di mortalità, ma allo stesso saggio d'interesse δ', e nella colonna (2), i valori del 2^0 membro per i su indicati valori di δ e δ'.

$n - t$	$n = 30$; $x = 30$		$n = 25$; $x = 35$		$n = 20$; $x = 40$	
	Rapporto $^0/_{00}$		Rapporto $^0/_{00}$		Rapporto $^0/_{00}$	
	osservati	calcolati in base alla [1] semplificata	osservati	calcolati in base alla [1] semplificata	osservati	calcolati in base alla [1] semplificata
	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)
1	1001,5	1001,0	1001,0	1001,0	1001,7	1000,9
5	1006,6	1005,1	1006,8	1004,8	1007,6	1004,6
10	1010,3	1009,9	1015,4	1009,4	1012,3	1008,9
15	1012,7	1010,5	1012,6	1013,8	1016,8	1013,1
24	1012,2	1018,8	1009,0	1017,9	—	—
25	1018,3	1022,9	—	—	—	—

Si può dire, quindi, che nel caso particolare da noi considerato, la riduzione di mortalità che si riscontra nel passaggio da una tavola a l'altra, equivalga, all'incirca e dentro certi limiti, ad una diminuzione del saggio di interesse dell'1,5 $^0/_{00}$. Se si volesse perciò avere una stima delle riserve matematiche secondo la nuova tavola e al tasso d'interesse del 4 $^0/_0$, ma utilizzando le valutazioni già eseguite con la vecchia tavola di mortalità, basterebbe calcolare le riserve secondo quest'ultima tavola ma al tasso del 3,85 $^0/_0$. Se, invece, valutate le riserve con la vecchia tavola al tasso del 4 $^0/_0$, si volessero considerare le riserve calcolate secondo la nuova tavola, queste si dovrebbero ritenere valutate al tasso d'interesse del 4,15 $^0/_0$. In questo secondo caso, ove il tasso teorico del 4 $^0/_0$ fosse, per le condizioni del mercato, sufficientemente cautelativo, può ammettere, con molta probabilità, che lo sarebbe pure il saggio del 4,15 $^0/_0$; per cui le riserve matematiche in base alla vecchia tavola e al 4 $^0/_0$ potrebbero ritenersi quasi sicuramente sufficienti.

INTERDIPENDENZA TRA UTILI DI MORTALITÀ E UTILI DI INTERESSE

DOTT. FERNANDO PAGLINO
Capo Ufficio dell'I.N.A.

1. — In questa breve nota, esamino, limitatamente ad una particolare categoria di assicurati, l'interdipendenza tra utili di mortalità e utili di interesse di un dato esercizio; interdipendenza che, di solito, nella trattazione teorica, non viene messa in evidenza (1).

Generalmente l'utile medio di mortalità e quello di interesse, per un certo esercizio, su ciascuna polizza di un determinato gruppo di assicurati, si considerano del tutto indipendenti. Così appaiono, però, solo per le particolari ipotesi semplificatrici che normalmente si introducono nel calcolo.

Infatti, in un bilancio di premi puri (2), nel caso ad esempio, della vita intera a premi vitalizi (facilmente estendibile alle altre forme in caso di morte), *nell'ipotesi che i premi scadano all'inizio dell'esercizio e che i sinistri siano liquidati alla fine dell'esercizio*, si trova che l'utile medio di mortalità per un gruppo chiuso di assicurati L_{x+n} aventi all'inizio dell'esercizio in esame l'età esatta $x+n$, e provenienti da L_x individui iscritti n anni prima,

(1) Sono grato al Prof. CANTELLI di avermi suggerito l'idea di questa ricerca nel corso delle sue lezioni di Matematica attuariale presso la Facoltà di Scienze statitische, demografiche e attuariali della R. Università di Roma.

(2) Cfr. G. BURANI, *Esposizione ed esame critico dei diversi sistemi per la ripartizione degli utili agli assicurati.* G. I. I. A., Roma, 1934-XII.

ciascuno individuo per una assicurazione unitaria, è dato da: (3)

$$[1] \qquad \bar{v}_1 = ({}_nV_x + P_x)(1+i) - q^*_{x+n}(1 - {}_{n+1}V_x) - {}_{n+1}V_x$$

dove $\bar{v}_1$ indica l'utile di mortalità, (3) mentre l'asterisco di cui è dotata la q_{x+n}, sta a significare (analogamente agli asterischi che appaiono nelle successive espressioni) che il simbolo che lo porta si riferisce a quantità tratta dalla esperienza effettiva.

D'altra parte, l'utile medio di interesse su ciascuna polizza, sempre nell'ipotesi che i premi scadano all'inizio dell'esercizio e i sinistri siano liquidati a fine esercizio, è dato dalla:

$$[4] \qquad \bar{v}_2 = ({}_nV_x + P_x)(i^* - i)$$

dove $\bar{v}_2$ indica appunto l'utile di interesse.

Si deduce che, tra utili di mortalità e utili di interesse, non ci sarebbe, secondo le (1) e (4), ossia nell'ipotesi che i premi scadano all'inizio e i sinistri siano liquidati alla fine dell'esercizio, alcuna dipendenza.

Se ora ricorriamo ad altre ipotesi sulle distribuzioni dei premi e dei sinistri nell'esercizio e consideriamo, per esempio, il caso continuo della vita intera a premi vitalizi, troviamo, cosa del resto che si può intuire a priori, che tale indipendenza più non esiste.

2. Per la vita intera a premi vitalizi, nel caso continuo, possiamo scrivere la seguente relazione tra la riserva matematica dopo n anni e quella dopo $n+1$ anni:

$$[5] \quad {}_nV_x\, e^{\delta} + P_x\, {}_{|1}\bar{a}_{x+n}\, e^{\delta} - \int_0^1 {}_tp_{x+n}\, \mu_{x+n+t}\, e^{\delta(1-t)}\, dt = p_{x+n}\ {}_{n+1}V_x$$

---

(3) Quando dalla (1) venga sottratta membro a membro l'identità

$$[2] \qquad 0 = ({}_nV_x + P_x)(1+i) - q_{x+n}(1 - {}_{n+1}V_x) - {}_{n+1}V_x,$$

che può considerarsi come una conseguenza della (1) stessa, si ottiene l'espressione più nota dell'utile di mortalità:

$$[3] \qquad \bar{v}_1 = (1 - {}_{n+1}V_x)(q_{x+n} - q^*_{x+n}) .$$

Cfr. STEPPARD HOMANS, *On the equitable distribution of surplus*, J. I. A., volume XI, 1877.

in cui

$$[6] \qquad {}_nV_x = 1 - \frac{\bar{a}_{x+n}}{\bar{a}_x} \qquad \text{e} \qquad P_x = \frac{1}{\bar{a}_x} - \delta \qquad [7].$$

Sostituendo tali espressioni nella [5], otteniamo:

$$[8] \qquad \left(1 - \frac{\bar{a}_{x+n}}{\bar{a}_x} + \frac{{}_{|1}\bar{a}_{x+n}}{\bar{a}_x} - \delta\ {}_{|1}\bar{a}_{x+n}\right) e^{\delta} -$$

$$-\left(1 - e^{-\delta}\, p_{x+n} - \delta\ {}_{|1}\bar{a}_{x+n}\right) e^{\delta} = p_{x+n}\left(1 - \frac{\bar{a}_{x+n+1}}{\bar{a}_x}\right).$$

Se durante l'anno $x+n \vdash x+n+1$, il saggio d'interesse realizzato è i^* anzichè quello teorico i, e il numero dei decessi è dato da

$$[9] \qquad \int_0^1 {}_tp^*_{x+n}\, \mu^*_{x+n+t}\, dt \qquad \text{anzichè da} \int_0^1 {}_tp_{x+n}\, \mu_{x+n+t}\, dt \qquad [9'];$$

la relazione [8] tra le riserve all'inizio e alla fine di quell'anno, si trasforma nella seguente:

$$[10] \qquad \left(1 - \frac{\bar{a}_{x+n}}{\bar{a}_x} + \frac{{}_{|1}\bar{a}^*_{x+n}}{\bar{a}_x} - \delta\ {}_{|1}\bar{a}^*_{x+n}\right) e^{\delta^*} -$$

$$-\left(1 - e^{-\delta^*}\, p^*_{x+n} - \delta^*\ {}_{|1}\bar{a}^*_{x+n}\right) e^{\delta^*} = p^*_{x+n}\left(1 - \frac{\bar{a}_{x+n+1}}{\bar{a}_x}\right) + \varepsilon$$

in cui ε rappresenta l'utile di mortalità e interesse realizzato nell'anno $x+n \vdash x+n+1$.

Sottraendo membro a membro dalla [10] la [8], si ottiene per ε il seguente valore:

$$[11] \qquad \varepsilon = (q_{x+n} - q^*_{x+n})\frac{\bar{a}_{x+n+1}}{\bar{a}_x} + (i - i^*)\frac{\bar{a}_{x+n}}{\bar{a}_x} +$$

$$+ (\delta^* - \delta)\frac{1}{l_{x+n}\, e^{-\delta^*(x+n+1)}}\int_{x+n}^{x+n+1} D^*_t\, dt +$$

$$+ \frac{1}{\bar{a}_x}\left[\frac{1}{l_{x+n}\, e^{-\delta^*(x+n+1)}}\int_{x+n}^{x+n+1} D^*_t\, dt - \frac{1}{l_{x+n}\, e^{-\delta(x+n+1)}}\int_{x+n}^{x+n+1} D_t\, dt\right]$$

dove $\qquad D^*_t = l^*_t\, e^{-\delta^* t}.$

Dall'analisi della [11] appare quanto volevamo mettere in evidenza: una parte dell'utile di esercizio non è scindibile in utile di mortalità e utile di interesse (3^0 e 4^0 termine della [11]); cioè, tra utile di mortalità e utile di interesse esiste una certa interdipendenza.

La [11] evidentemente non si presta al calcolo numerico: occorre procedere ad un calcolo approssimato degli integrali in essa contenuti; sia pur tenendo presente che l'approssimazione che si introduce viene a modificare l'interdipendenza tra utili di mortalità e utili di interesse così come è posta nella formula esatta [11].

3. Applichiamo anzitutto nel calcolo degli integrali la formula di sommazione di Euler (4): troviamo allora per la [11], la seguente espressione approssimata:

$$[13] \qquad \varepsilon_1 = (q_{x+n} - q^*_{x+n}) \frac{\bar{a}_{x+n+1}}{\bar{a}_x} + (i - i^*) \frac{\bar{a}_{x+n}}{\bar{a}_x} + $$
$$+ (\delta^* - \delta)\, z^* + \frac{1}{\bar{a}_x} (z^* - z)$$

dove

$$[14] \qquad z^* = e^{\delta^*} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-\delta^*} p^*_{x+n} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{12} \left[\mu^*_{x+n} - e^{-\delta^*} p^*_{x+n}\, \mu^*_{x+n+1} + \delta^* (1 - e^{-\delta^*} p^*_{x+n}) \right] \right\}$$

(4) La quadratura approssimata degli integrali che appaiono nella [11] potrebbe essere fornita direttamente da un planimetro, in base al diagramma dei sopravviventi l_t (oppure l^*_t) in funzione di $e^{-\delta t}$ (oppure $e^{-\delta^* t}$); infatti eseguendo il cambiamento di variabile di integrazione $\tau = e^{-\delta t}$, si trova:

$$[12] \qquad \int_{x+n}^{x+n+1} l_t\, e^{-\delta t}\, dt = \frac{1}{\delta} \int_{e^{-\delta(x+n+1)}}^{e^{-\delta(x+n)}} l(\tau)\, d\tau \ .$$

mentre per z si ha un'espressione analoga alla [14], in cui però tutti i simboli sono sforniti di asterisco.

Con facili passaggi dalla [13] si ottiene la:

[15] $$\varepsilon_1 = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3$$

in cui

$$\nu_1 = (q_{x+n} - q^*_{x+n}) \frac{\overline{a}_{x+n+1} - \frac{1}{2}}{\overline{a}_x};$$

$$\nu_2 = (i^* - i)\left(1 - \frac{\overline{a}_{x+n} - \frac{1}{2}}{\overline{a}_x} - \frac{i^* + i}{2}\right) - \frac{\delta^* - \delta}{12} e^{\delta^*} \delta^* -$$

$$- \frac{1}{12\overline{a}_x} [e^{\delta^*} \delta^* - e^{\delta} \delta];$$

$$\nu_3 = (\delta^* - \delta) \left\{ \frac{i^* - q^*_{x+n}}{2} + \frac{1}{12} [p^*_{x+n} (\mu^*_{x+n+1} + \delta^*) - e^{\delta^*} \mu^*_{x+n}] \right\} +$$

$$+ \frac{1}{12\overline{a}_x} [p^*_{x+n} (\mu^*_{x+n+1} + \delta^*) - p_{x+n} (\mu_{x+n+1} + \delta) -$$

$$- e^{\delta^*} \mu^*_{x+n} + e^{\delta} \mu_{x+n}].$$

Nella [15], ν_1 rappresenta la parte principale dell' utile di mortalità;

ν_2, la parte principale dell'utile di interesse; e, infine,

ν_3, la parte d'utile congiuntamente d'interesse e di mortalità.

Il saggio istantaneo di mortalità che appare nella (15) può essere in pratica calcolato in base alla formula approssimata:

[16] $$\mu'_x \sim \frac{l_{x-1} - l_{x+1}}{2\, l_x}.$$

Con minore approssimazione, ma introducendo la sola ipotesi

$$[17] \qquad \bar{a}_x \sim a_x + \frac{1}{2} \; ,$$

la [11] può essere sostituita dalla:

$$[18] \qquad \varepsilon_2 = (q_{x+n} - q^*_{x+n}) \frac{a_{x+n+1}}{a_x + \frac{1}{2}} +$$

$$+ (i^* - i)\left(1 - \frac{a_{x+n}}{a_x + \frac{1}{2}} - \frac{i^* + i}{2}\right) + (\delta^* - \delta)\frac{i^* - q^*_{x+n}}{2} \; ,$$

in cui appunto il terzo termine rappresenta la parte di utile dipendente congiuntamente dalla mortalità e dall'interesse.

4. Nel caso in cui nell'intervallo $x + n \vdash x + n + 1$, vari solo l'andamento della mortalità, e sia perciò $i^* = i$; la [11] si trasforma nella

$$[19] \; \varepsilon = (q_{x+n} - q^*_{x+n}) \frac{\bar{a}_{x+n+1}}{\bar{a}_x} + \frac{1}{\bar{a}_x} \frac{1}{e^{-\delta} D_{x+n}} \int_{x+n}^{x+n+1} e^{-\delta t} (l^*_t - l_t)\, dt \, ;$$

mentre nel caso in cui, nell'intervallo suddetto, la mortalità prevista sia uguale a quella effettiva, ma $i' \neq i$; la (11) viene sostituita dalla

$$[20] \quad \varepsilon = (i - i^*) \frac{\bar{a}_{x+n}}{\bar{a}_x} + (\delta^* - \delta) \frac{1}{l_{x+n}\, e^{-\delta^* (x+n+1)}} \int_{x+n}^{x+n+1} l_t\, e^{-\delta^* t}\, dt +$$

$$+ \frac{1}{\bar{a}_x} \left[\frac{1}{l_{x+n}\, e^{-\delta^* (x+n+1)}} \int_{x+n}^{x+n+1} l_t\, e^{-\delta^* t}\, dt - \frac{1}{l_{x+n}\, e^{-\delta (x+n+1)}} \int_{x+n}^{x+n+1} D_t\, dt \right] .$$

La [19] rappresenta, quindi, l'utile di mortalità nel caso in cui non ci siano utili di interesse; mentre la [20] rappresenta l'utile di interesse allorchè non ci sia alcun utile di mortalità. Ad entrambe queste formule si possono far corrispondere espressioni approssimate facilmente deducibili dalla [15] e dalla [18].

5. Riportiamo un'applicazione numerica allo scopo di mettere in evidenza, sia pure in un caso particolare, l'importanza dei vari termini della [15]. Abbiamo ritenuto conveniente estendere tale formula anche alla «mista»; nella quale, in generale, rispetto alla «vita intera», a pari età di ingresso in assicurazione e per durate non molto lunghe, l'accrescimento della riserva matematica nel tempo è più rapido. L'estensione è molto facile: basta sostituire alle annualità vitalizie che appaiono nella (15), delle annualità temporanee. Indichiamo con λ_1, λ_2, λ_3, rispettivamente la parte principale dell'utile di mortalità, la parte principale dell'utile di interesse, e la parte di utile congiuntamente di interesse e di mortalità, conseguite in media per ciascuna polizza di capitale unitario della categoria «mista» nell'anno $x + n \vdash x + n + 1$.

Per questa stessa categoria, indichiamo invece con $\bar{\lambda}_1$, $\bar{\lambda}_2$, rispettivamente l'utile di mortalità e quello d'interesse desumibili dalle [3] e [4].

Consideriamo due gruppi chiusi di assicurati entrati in assicurazioni alla età esatta di quaranta anni: il primo, nella categoria «vita intera a premi vitalizi»; l'altro, nella categoria «mista durata 25 anni». I premi siano calcolati in base alla tavola *M* (1901) e al tasso d'interesse del 3,5 %. Il saggio d'interesse realizzato nell'$n + 1^{\text{esimo}}$ anno di assicurazione, sia del 5,5 %; e l'andamento effettivo della mortalità in quello stesso anno, sia quello desumibile dalla tavola di mortalità 1930-32 della popolazione maschile del Regno.

Calcoliamo, anzitutto, relativamente al gruppo di assicurati «vita intera», ν_1, ν_2, ν_3, in valore assoluto e relativo rispetto ad $\varepsilon_1 = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3$, per tutti i valori interi di n che vanno, di 5 in 5, da 2 a 37.

Tavola I. — *Utile medio di mortalità e di interesse per il caso continuo della vita intera a premi vitalizi, nell'n + 1esimo anno di assicurazione (età esatta all'ingresso in assicurazione: 40 anni; capitale assicurato per ciascun contratto: 1.000 unità).*

n	parte principale dell'utile di mortalità $v_1 \cdot 10^3$	parte principale dell'utile di interesse $v_2 \cdot 10^3$	utile congiuntamente di mortalità e interesse $v_3 \cdot 10^3$	(1) + (2) + + (3)	$\frac{(1)}{(4)} 10^2$	$\frac{(2)}{(4)} 10^2$	$\frac{(3)}{(4)} 10^2$
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
2	2,430	0,154	0,639	3,223	75,4	4,8	19,8
7	2,274	1,939	0,620	4,833	47,1	40,1	12,8
12	2,838	3,912	0,589	7,339	38,7	53,3	8,0
17	2,408	6,068	0,536	9,012	26,7	67,3	6,0
22	4,135	8,275	0,454	12,864	32,1	64,3	3,6
27	4,118	10,433	0,316	14,867	27,7	70,2	2,1
32	6,138	12,456	0,078	18,672	32,9	66,7	0,4
37	5,797	14,156	— 0,321	19,632	29,5	72,1	— 1,6

La parte principale dell'utile di mortalità, per $n \leq 37$, pur non essendo sempre crescente al crescere di n, mostra una decisa tendenza all'aumento. La parte principale dell'utile d'interesse cresce rapidamente al crescere di n : le differenze prime risultano, fino a $n = 22$, leggermente crescenti e poi decrescenti. La parte di utile congiuntamente di mortalità e d'interesse decresce lievemente fino ad $n = 22$, per poi decrescere più rapidamente fino ad assumere un valore negativo per $n = 37$. I valori relativi riportati nelle colonne (5), (6) e (7) della precedente tavola, permettono di apprezzare l'importanza che avrebbe nei primi anni di assicurazione la parte di utile congiuntamente di mortalità e di interesse. Da tali cifre appare pure l'importanza degli utili di mortalità rispetto a quelli d'interesse, specie per valori non troppo elevati di n, che sono poi quelli che possono avere maggiore peso nella composizione di un portafoglio assicurativo (5).

(5) La durata media trascorsa in assicurazione, per i contratti del portafoglio ordinario dell'Istituto nazionale delle assicurazioni, in vigore alla fine dell'esercizio 1936, è di 10,6 anni per la vita intera e di 7,1 anni per la mista. Cfr. *Relazione sull'andamento della gestione nel quinquennio 1932-1936*, pag. 71. Roma, 1938-XVI.

Per il gruppo di assicurati della categoria «mista», calcoliamo, invece λ_1, λ_2, λ_3, in valore assoluto e relativo, per tutti i valori interi di n che vanno, di cinque in cinque, da 2 a 22.

Tavola II. — *Utile medio di mortalità e d'interesse per il caso continuo della mista durata 25 anni, nell'$n+1^{esimo}$ anno di assicurazione (età esatta all'ingresso in assicurazione: 40 anni; capitale assicurato per ciascun contratto: 1.000 unità).*

n	parte principale dell'utile di		utile congiuntamente di mortalità e interesse	$(1)+(2)+$ $+(3)$	$\frac{(1)}{(4)}10^2$	$\frac{(2)}{(4)}10^2$	$\frac{(3)}{(4)}10^2$
	mortalità $\lambda_1 \cdot 10^3$	interesse $\lambda_2 \cdot 10^3$	$\lambda_3 \cdot 10^3$				
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
2	2,368	0,608	0,653	3,629	65,3	16,7	18,0
7	2,061	3,501	0,634	6,196	33,3	56,5	10,2
12	2,269	6,216	0,603	9,088	25,0	68,4	6,6
17	1,492	10,259	0,550	12,301	12,1	83,4	4,5
22	1,168	15,209	0,468	16,845	6,9	90,3	2,8

La parte principale dell'utile di mortalità, contrariamente a quanto accade per la vita intera, mostra, nel caso della mista, una tendenza alla diminuzione. La parte principale dell'utile di interesse, come del resto era da prevedere, cresce molto più rapidamente nella mista che nella vita intera. La parte di utile congiuntamente di mortalità e d'interesse presenta invece analogo andamento in tutti e due i gruppi di assicurati.

Dalle cifre relative riportate nelle colonne (5), (6) e (7) risulta come l'importanza della parte di utile congiuntamente di mortalità e d'interesse sia un po' inferiore nella mista rispetto alla vita intera.

Nelle tavole che seguono sono riportati i valori, assoluti e relativi, di $\bar{\nu}_1$, $\bar{\nu}_2$ e $\bar{\lambda}_1$, $\bar{\lambda}_2$, cioè dell'utile medio di mortalità e d'interesse, per i due gruppi di assicurati in esame, nell'ipotesi che i premi scadano all'inizio dell'esercizio e che i sinistri siano liquidati alla fine dell'esercizio.

Tavola III. — *Utile medio di mortalità e d'interesse per la vita intera a premi vitalizi, nell'$n+1^{esimo}$ anno di assicurazione; nell'ipotesi che i premi scadano all'inizio dell'esercizio e che i sinistri siano liquidati alla fine dell'esercizio (età esatta all'ingresso in assicurazione: 40 anni; capitale assicurato per ciascun contratto: 1.000 unità).*

n	utile di mortalità $\bar{\nu}_1 \cdot 10^3$	utile di interesse $\bar{\nu}_2 \cdot 10^3$	(1) + (2)	$\frac{(1)}{(3)}\, 10^2$	$\frac{(2)}{(3)}\, 10^2$
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
2	2,360	1,107	3,467	68,1	31,9
7	2,208	2,841	5,049	43,7	56,3
12	2,757	4,757	7,514	36,7	63,3
17	2,339	6,852	9,191	25,4	74,6
22	4,017	8,996	13,013	30,9	69,1
27	3,999	11,092	15,091	26,5	73,5
32	5,962	13,057	19,019	31,3	68,7
37	5,632	14,708	20,340	27,7	72,3

Tavola IV. — *Utile medio di mortalita e d'interesse per la mista durata 25 anni, nell'$n+1^{esimo}$ anno di assicurazione; nell'ipotesi che i premi scadano all'inizio dell'esercizio e che i sinistri siano liquidati alla fine dell'esercizio (età esatta all'ingresso in assicurazione: 40 anni; capitale assicurato per ciascun contratto: 1.000 unità).*

n	utile di mortalità $\bar{\lambda}_1 \cdot 10^3$	utile di interesse $\bar{\lambda}_2 \cdot 10^3$	(1) + (2)	$\frac{(1)}{(3)}\, 10^2$	$\frac{(2)}{(3)}\, 10^2$
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
2	2,286	1,677	3,963	57,7	42,3
7	1,980	4,549	6,529	30,3	69,7
12	2,157	7,925	10,082	21,4	78,4
17	1,381	11,960	13,341	10,4	89,6
22	0,931	15,602	16,533	5,6	94,4

6. Cerchiamo ora di dare un'idea dell'importanza che, per un dato portafoglio, considerato nel suo complesso, in un certo esercizio, possono avere la parte principale degli utili di mortalità, quella degli utili di interesse e la parte di utili congiuntamente di interesse e di mortalità; nel caso che le basi demografiche e finanziarie e il divario fra mortalità e tasso d'interesse teorici e mortalità e tasso di interesse effettivi, in quell'esercizio, siano quelli considerati nel paragrafo precedente. A tale scopo prendiamo in esame un portafoglio costituito da soli assicurati delle due categorie «vita intera a premi vitalizi» e «mista durata 25 anni», tutti entrati in assicurazione a 40 anni di età; e supponiamo che per i due gruppi di assicurati le distribuzioni relative dei capitali assicurati in vigore all'inizio di un certo esercizio, secondo la durata trascorsa in assicurazione, siano quelle stesse che presentano i capitali della «vita intera» e della «mista» del portafoglio ordinario dell'Istituto nazionale delle assicurazioni alla fine dell'esercizio 1936 (6). Se, inoltre, supponiamo, per semplicità, che sia i valori di ν_1, ν_2, ν_3, forniti dalla tavola I, che quelli di λ_1, λ_2, λ_3, forniti dalla tavola II, indicanti l'utile medio nell'$n+1^{\text{esimo}}$ anno di assicurazione, possano riferirsi a contratti che, all'inizio dell'esercizio in esame, hanno antidurata compresa nel campo $n-2 \vdash n+3$; riusciamo a calcolare, in base ai dati di cui disponiamo, l'ammontare totale della parte principale degli utili di mortalità, quello della parte principale degli utili di interesse e quello della parte di utile congiuntamente di mortalità e d'interesse, relativamente al su descritto portafoglio, considerato in grandezza unitaria per quanto riguarda i capitali assicurati sia nella forma vita intera che nella mista.

(6) Cfr. *Relazione sull'andamento della gestione ecc.*, *op. cit.*, pag. 68.

Tavola V. — *Valutazione approssimata dell'utile di mortalità e d'interesse in un dato esercizio, per un ipotetico portafoglio di un milione di capitali assicurati nella vita intera e di altrettanto nella mista.*

Antidurata	Frequenza relativa dei capitali assicurati		Vita intera premi vitalizi			Mista		
			Parte principale dell'utile di		Utile congiunt. mort. e int.	Parte principale dell'utile di		Utile congiunt. mort. e int.
	vita intera	mista	mortalità (1) $\nu_1 10^3$	interesse (1) $\nu_2 10^3$	(1) $\nu_3 10^3$	mortalità (2) $\lambda_1 10^3$	interesse (2) $\lambda_2 10^3$	(2) $\lambda_3 10^3$
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
0 |— 5	483	449	1173	74	309	1063	273	293
5 |— 10	244	291	555	473	151	600	1019	184
10 |— 15	142	194	403	555	84	440	1206	117
15 |— 20	54	54	130	327	29	81	554	30
20 |— 25	40	(1) 12	165	331	18	14	182	6
25 |— 30	17		70	177	5			
30 |— 35	10		61	125	1			
35 |— 40	(2) 10		58	141	— 3			
totali . .	1000	1000	2615	2203	594	2198	3234	630
valori relativi			49	40	11	36	53	11

(1) Comprese 2 unità della classe 25 |— 30. (Cfr. *Relazione, op. cit.*, pag. 68).

(2) Comprese 3 unità della classe 40 |— 45 e 1 unità della classe 45 |— 50.

Da questa tavola risulta evidente come, nel nostro ipotetico portafoglio, che abbiamo cercato di avvicinare in un certo qual modo ad un caso concreto, dato il prevalere dei contratti con antidurata piuttosto breve (l'antidurata mediana è compresa tra 5 e 6 anni in tutte e due le categorie considerate), acquisti particolare rilievo la parte principale degli utili di mortalità e come non sia del tutto trascurabile la parte di utile congiuntamente d'interesse e di mortalità.