PROBLEMI ATTUARIALI

INTORNO AD UNA SPECIALE TAVOLA DI MORTALITÀ

RAFFAELE CULTRERA

Capo del Servizio Bilancio Tecnico e Statistica dell'I.N.A.

È noto come nell'ultimo Congresso internazionale degli attuari (*) tenutosi nel maggio del decorso anno a Roma, i problemi connessi con la costruzione e l'impiego delle tavole selezionate per la determinazione dei valori attuariali, abbiano formato oggetto di interessanti comunicazioni da parte di diversi autori, i quali, mentre sono concordi nel ritenere che le tavole selezionate diano luogo dal punto di vista teorico a risultati più attendibili di quelli che si possono trarre dall'impiego di altre tavole, in maggioranza manifestano l'opinione che, dato l'uso poco agevole di esse e le difficoltà inerenti alla loro costruzione, convenga ricorrere a metodi semplificativi, anche se questi conducano a risultati solamente approssimati.

A tal proposito è stato messo in evidenza che il grado di approssimazione raggiunto nella determinazione dei premi puri con l'ausilio della tavola aggregata è più che soddisfacente, mentre si è osservato che le riserve matematiche, calcolate con siffatta tavola, presentano scarti quasi costantemente negativi, e talora non trascurabili, rispetto a quelle ricavate in base ad una tavola di selezione.

In vista di ciò, mi propongo, nel presente lavoro, mostrare dal lato pratico come si possa costruire una tavola di mortalità che, adottata per la determinazione delle riserve matematiche

(*) V. *Atti del X Congresso Internazionale degli Attuari.* vol. II, Roma, 1934.

globali di un Istituto assicurativo, conduca a risultati che si approssimino a quelli dedotti da una tavola selezionata più di quanto non consenta l'impiego di una tavola aggregata nel senso comunemente inteso.

Avrò così occasione di mettere in rilievo la parte principale dell'errore che si commette calcolando le riserve con la tavola aggregata invece che con la selezionata, e di accennare a qualche metodo adatto per la rilevazione dei tassi di mortalità relativi alla speciale tavola di cui mi occupo nella presente Nota. Nel corso della quale mi riferirò alla mortalità per capitali assicurati anzichè per individui poichè agli effetti del calcolo delle riserve mi sembra più proprio tener conto di quella anzichè di questa mentre è praticamente facile passare dalla prima alla seconda.

1. — Siano

$$C_{(y,x)},\ C_{(y,x+1)},\ \ldots\ldots,\ C_{(y,y)}$$

i capitali assicurati da un gruppo di individui aventi la stessa età y ed entrati rispettivamente in assicurazione in età x, $x+1, \ldots\ldots, y$ e siano

$$q'_{[x]+y-x},\ q'_{[x+1]+y-x-1},\ \ldots\ldots,\ q'_{[y]}$$

i rispettivi tassi di mortalità secondo una certa tavola selezionata, mentre sarà

$$q'_y = \frac{q'_{[x]+y-x}\,C_{(y,x)} + q'_{[x+1]+y-x-1}\,C_{(y,x+1)} + \ldots + q'_{[y]}\,C_{(y,y)}}{C_{(y)}} \qquad (1)$$

il tasso della tavola aggregata corrispondente, essendo

$$C_{(y)} = \sum_{t=x}^{t=y} C_{(y,t)}$$

Sia $V_{(y,x)}$ la riserva del gruppo degli individui di età y entrati in assicurazione in età x; $V_{(y)}$ data da

$$V_{(y)} = \sum_{t=x}^{t=y} V_{(y,t)}$$

la riserva complessiva del gruppo di età y, e P il premio puro totale dovuto da questi. Sussiste la nota relazione

$$(V_{(y)} + P)(1+i) - \sum_{t=x}^{t=y} q'_{[t]+y-t}\, C_{(y,t)} = \sum_{t=x}^{t=y} p'_{[t]+y-t}\, V_{(y+1,t)} \tag{2}$$

dove i è il tasso di interesse assunto per il calcolo della riserva, ed è supposto che in caso di sinistro il capitale assicurato sia pagabile alla fine dell'anno. La (2) si può anche scrivere

$$(V_{(y)} + P)(1+i) - \sum_{t=x}^{t=y} q'_{[t]+y-t}\, [C_{(y,t)} - V_{(y+1,t)}] = V_{(y+1)}. \tag{3}$$

È chiaro che un tasso medio di mortalità $\overline{q}_y$ del gruppo (y) che porti dalla riserva $V_{(y)}$ alla riserva $V_{(y+1)}$, rimanendo invariati tutti gli altri dati, dovrà soddisfare alla relazione

$$(V_{(y)} + P)(1+i) - \overline{q}_y\, [C_{(y)} - V_{(y+1)}] = V_{(y+1)} \tag{4}$$

e quindi sarà dato, per la (3), da

$$\overline{q}_y = \frac{\sum_{t=x}^{t=y} q'_{[t]+y-t}\, [C_{(y,t)} - V_{(y+1,t)}]}{C_{(y)} - V_{(y+1)}}. \tag{5}$$

Si deduce dalla precedente eguaglianza che una tavola i cui tassi siano le medie ponderate dei tassi corrispondenti della tavola selezionata con pesi eguali ai capitali rischio, calcolati alla fine di ciascun anno, porta ad un ammontare complessivo di riserve eguale a quello che si ricava dall'impiego della tavola selezionata.

2. — È utile mettere in evidenza la relazione che intercede tra la $\overline{q}_y$ e la q'_y.

Tenuto presente che le $q'_{[t]+y-t}$ $(t = x, x+1, \ldots\ldots. y)$, secondo le ipotesi ammesse, soddisfano alle relazioni

$$q'_{[x]+y-x} \geqslant q'_{[x+1]+y-x-1} \geqslant \ldots > q'_{[y-1]+1} \ldots > q'_{[y]}$$

e che i capitali rischio unitari $\dfrac{C_{(y,t)} - V_{(y+1,t)}}{C_{(y,t)}}$ crescono col cre-

crescere di t, si rileva subito, da un confronto della (5) con la (1), che è sempre

$$\overline{q}_y < q'_y. \tag{6}$$

Si ha poi, dalla (5),

$$\overline{q}_y = \frac{C_{(y)} \dfrac{\sum\limits_{t=x}^{t=y} q'_{[t]+y-t}\, C_{(y,t)}}{C_{(y)}} - V_{(y+1)} \dfrac{\sum\limits_{t=x}^{t=y} q'_{[t]+y-t}\, V_{(y+1,t)}}{V_{(y+1)}}}{C_{(y)} - V_{(y+1)}} \tag{7}$$

dove la prima frazione del numeratore ci dà, per la (1), il valore della q'_y, mentre la seconda, specie se il periodo di selezione, come è ormai generalmente accettato, si restringe ad un triennio, si può praticamente ritenere, per un Istituto che si trovi in periodo di regime, molto prossima al tasso $q'_{(y-3)+3}$ della tavola *ultimate* poichè è la media ponderata delle $q'_{[t]+y-t}$ con pesi eguali alle riserve.

Si può scrivere pertanto

$$\overline{q}_y \simeq \frac{C_{(y)}\, q'_y - V_{(y+1)}\, q'_{(y-3)+3}}{C_{(y)} - V_{(y+1)}} \tag{8}$$

e quindi

$$\overline{q}_y \simeq \frac{C_{(y)}\, q'_y - V_{(y+1)}\, q'_y + V_{(y+1)}\, q'_y - V_{(y+1)}\, q'_{(y-3)+3}}{C_{(y)} - V_{(y+1)}} =$$

$$= q'_y - (q_{(y-3)+3} - q'_y)\, \frac{V_{(y+1)}}{C_{(y)} - V_{(y+1)}};$$

e se si pone

$$\delta_{(y)} = (q_{(y-3)+3} - q'_y)\, \frac{V_{(y+1)}}{C_{(y)} - V_{(y+1)}}, \tag{9}$$

si ha

$$\overline{q}_y \simeq q'_y - \delta_{(y)}. \tag{10}$$

Se a e b sono rispettivamente le età minima e massima per l'entrata in assicurazione, è

$$\begin{aligned} \delta_{(y)} &= 0 \qquad \begin{cases} y \leq a \\ y > b+3 \end{cases} \\ \delta_{(y)} &> 0 \qquad a < y \leq b+3 \end{aligned} \tag{11}$$

e poichè per $y > b + 3$ si deve ritenere $q'_y = q'_{(y-3)+3}$, si ottiene

$$\begin{aligned} \overline{q}_y = q'_y = q'_{(y-3)+3} \qquad & \begin{cases} y \leqq a \\ y > b + 3 \end{cases} \\ \overline{q}_y < q'_y < q'_{(y-3)+3} \qquad & a < y \leqq b + 3. \end{aligned} \tag{12}$$

La riserva complessiva calcolata col metodo retrospettivo secondo una tavola di $\overline{q}_y$, risulta, per quanto precede, equivalente alla somma delle singole riserve calcolate col mezzo della tavola selezionata. È chiaro però che una riserva siffatta non può venir determinata seguendo il metodo prospettivo in quanto bisognerebbe tener conto nel calcolo di questa, anche degli assicurati che entreranno in futuro.

3. — Si voglia ora determinare l'errore che comporta nel calcolo della riserva, la sostituzione della tavola aggregata, dedotta dalla (1), a quella delle $\overline{q}_y$.

Sia $V'_{(y,\,x)}$ la riserva, in base alla tavola delle q'_y, relativa al capitale $C'_{(y,\,x)}$ pertinente ad un individuo di età attuale y ed entrato in assicurazione in età x, e sia $\Delta_{(y,\,x)}$ la differenza tra la riserva secondo la tavola delle $\overline{q}_y$ e quest'ultima.

Supponendo, come finora si è fatto, che il premio puro p non vari nel passaggio dall'una all'altra tavola, si ottiene, in base alle due tavole,

$$\begin{aligned} (V'_{(y-1,\,x)} + p)(1 + i) - q'_{y-1}\, C'_{(y-1,\,x)} &= (1 - q'_{y-1})\, V'_{(y,\,x)}\,; \\ (V'_{(y-1,\,x)} + \Delta_{(y-1,\,x)} + p)(1 + i) - \overline{q}_{y-1}\, C_{(y-1,\,x)} &= \\ = (1 - \overline{q}_{y-1})\,(V'_{(y,\,x)} &+ \Delta_{(y,\,x)}) \end{aligned} \tag{13}$$

da cui, per la (4), si ricava

$$\begin{aligned} \Delta_{(y-1,\,x)}(1 + i) + [C'_{(y-1,\,x)} - V'_{(y,\,x)}]\,\delta_{(y-1)} &= \\ (1 - \overline{q}_{y-1})\,\Delta_{(y,\,x)}\,; & \end{aligned} \tag{14}$$

e sostituendo ad y in quest'ultima espressione,

$$y - 1, \quad y - 2, \ldots\ldots, \quad x + 1,$$

si ottiene, dopo facili semplificazioni,

$$\begin{aligned} \Delta_{(y,\,x)} &= \sum_{t=x}^{t=y-1} \frac{[C'_{(t,\,x)} - V'_{(t+1,\,x)}]\,\delta_{(t)}}{{}_{y-t}\bar{p}_t\, v^{y-t-1}} = \\ &= \sum_{t=x}^{t=y-1} \frac{[C'_{(t,\,x)} - V'_{(t+1,\,x)}]\,\delta_{(t)}\, v}{{}_{y-t}\bar{E}_t} \end{aligned} \tag{15}$$

dove, posto $\bar{p}_t = 1 - \bar{q}_t$, è

$${}_{y-t}\bar{p}_t = \bar{p}_t \cdot \bar{p}_{t+1} \cdots\cdots \bar{p}_{y-1}\,, \qquad {}_{y-t}\bar{E}_t = v^{y-t}\; {}_{y-t}\bar{p}_t.$$

La (15), che ci dà la differenza tra la riserva calcolata a mezzo delle $\bar{q}_y$ e quella ricavata dalla tavola delle q'_y, rappresenta il montante demografico finanziario dei premi di rischio nei quali è δ_t la probabilità di morte, ed è sempre crescente col tendere di y ad $x + n$ se n è la durata del contratto. Ciò porta che, a scadenza, la riserva secondo le $\bar{q}_y$ viene a superare la riserva della tavola aggregata della quantità espressa da

$$\sum_{t=x}^{t=x+n-1} \frac{[C'_{(t,\,y)} - V'_{(t+1,\,x)}]\,\delta_t\, v}{{}_{x+n-t}\bar{E}_t}\,. \tag{16}$$

Da quest'ultima espressione risulta chiaro che la tavola delle $\bar{q}_y$ è solo utilizzabile per il calcolo della riserva complessiva del gruppo ma non per la riserva individuale.

La (15) si può porre sotto la forma

$$\begin{aligned} \Delta_{(y,\,x)} = &\sum_{t=x}^{t=x+n-1} \frac{[C'_{(t,\,x)} - V'_{(t+1,\,x)}]\,\delta_t\, v}{{}_{x+y-t}\bar{E}_t}\; {}_{x+n-y}\bar{E}_y \; - \\ &- \sum_{t=y}^{t=x+n-1} \frac{[C'_{(t,\,x)} - V'_{(t+1,\,x)}]\,\delta_t\, v}{{}_{x+n-t}\bar{E}_t}\; {}_{x+n-y}\bar{E}_y \end{aligned}$$

e tenendo presente che è

$$\frac{{}_{x+n-y}\bar{E}_y}{{}_{x+n-t}\bar{E}_t} = {}_{t-y}\bar{E}_y,$$

si può scrivere

$$\Delta_{(y,x)} = {}_{x+n-y}\overline{E}_y \sum_{t=x}^{t=x+n-1} \frac{[C'_{(t,x)} - V'_{(t+1,x)}]\,\delta_t\,v}{_{x+n-y}E_t} - \\ - \sum_{t=y}^{t=x+n-1} {}_{t-y}\overline{E}_y\,[C'_{(t,x)} - V'_{(t+1,x)}]\,\delta_t\,v \qquad (15')$$

La (15) o (15′), calcolata per tutti i contratti che costituiscono il portafoglio di un Istituto, rappresenta una extra riserva da porre in bilancio accanto a quella dedotta dalla tavola aggregata, quando l'Istituto non disponesse di altre riserve libere. La (15′) permette il calcolo con metodo prospettivo, poichè la prima sommatoria può essere determinata senz'altro all'atto dell'assunzione di ciascun contratto.

4. — Accenniamo infine a due metodi che si possono seguire per il calcolo delle $\overline{q}_y$, o di valori approssimati di esse:

a) Quando si disponga della tavola *aggregata* e della tavola *ultimate*, si può applicare direttamente la (9). Però, poichè non si può certo fare assegnamento sul grado di stabilità statistica del rapporto

$$\frac{V_{(y+1)}}{C_{(y)} - V_{(y+1)}}$$

per ciascuna età, si può ad esso sostituire, per tutti i valori di y, da $a+3$ a $b+3$, quello ottenuto dalla composizione di $2\,k+1$ rapporti simili al precedente e riguardanti le età da $y-(k-1)$ a $y+(k+1)$ cioè

$$\frac{\sum\limits_{u=y-(k-1)}^{u=y+(k+1)} V_{(u)}}{\sum\limits_{u=y-(k-1)}^{u=y+(k+1)} [C_{(u-1)} - V_{(u)}]}$$

Questi ultimi rapporti avranno certamente delle variazioni meno sensibili dei precedenti. Per $y = a,\ a+1, \ldots\ a+(k-1)$, si può procedere per estrapolazione. Le riserve $V_{(u)}$ s'intenderebbero calcolate secondo le tavole selezionate, però se ad esse si sostituiscono quelle ricavate dalle aggregate si ottengono dei tassi approssimati per eccesso, rispetto a quelli dati dalla (8), ma sempre inferiori ai tassi q'_y della tavola aggregata.

b) Si possono ricavare le $\bar{\bar{q}}_y$ per via diretta.

Per le ipotesi fatte, $C_{(y,t)}$ rappresenta il totale dei capitali esposti al rischio e riguardanti gli individui aventi età y al principio dell'anno ed entrati in assicurazione in età t. Sia $d_{(y,t)}$ il capitale eliminato per morte degli individui in età compresa tra y e $y+1$ facenti parte del gruppo indicato; si ha

$$q_{[t]+y-t} = \frac{d_{(y,t)}}{C_{(y,t)}} \tag{17}$$

e quindi per la (5)

$$\bar{q}_y = \frac{\sum\limits_{t=x}^{t=y} d_{(y,t)} \left(1 - \frac{V_{(y+1,t)}}{C_{(y,t)}}\right)}{C'_{(y)} - V_{(y+1)}}. \tag{18}$$

Da quest'ultima formola consegue che la costruzione di una tavola di $\bar{q}_y$ è analoga a quella di una tavola aggregata quando si sostituiscano, sia negli eliminati che negli esposti, ai capitali assicurati i capitali sotto rischio. Come avviene per il metodo poc'anzi indicato, se alle riserve secondo la tavola selezionata si sostituiscono quelle ricavate dalla tavola aggregata, si ottengono valori delle $\bar{q}_y$ approssimati per eccesso.

Concludendo, si può in pratica costruire una tavola di mortalità che porti ad una riserva complessiva che differisca dalla riserva dedotta da una data tavola di selezione per quantità trascurabili. È da notare però che, intervenendo i capitali rischio nella determinazione di quella speciale tavola, i tassi ad essa pertinenti dipendono anche dal saggio di interesse assunto a base del calcolo delle riserve.

SULL' IMPORTANZA DELLE TAVOLE DI SELEZIONE FRA LE BASI TECNICHE DELL' ASSICURAZIONE SULLA VITA

PIETRO SMOLENSKY
Condirettore delle « Assicurazioni Generali »

I

Sebbene la storia dell' invenzione delle tavole di selezione sia particolarmente istruttiva, tuttavia essa non è troppo nota agli attuari.

Il dubbio se sia giusto applicare le probabilità di morte derivate da tavole comuni di mortalità a gruppi di assicurati scelti in base a una visita medica, fu affacciato da alcuni attuari inglesi già nella prima metà del secolo passato. W. MORGAN nella sua prefazione all'opera « *Tables of Experiences of the Equitable Society* » (1) si esprimeva a tale proposito con le seguenti parole:

« È ovvio che in un gruppo di persone della stessa età, selezionate quali sane dalla massa generale dei viventi, la mortalità deve essere durante i primi 10 o 20 anni dal momento della selezione, considerevolmente minore di quella che si verifica nel complesso di persone, fra le quali sono state scelte. Col crescere dell' età, lo stato di salute in generale e le probabilità di morte vanno naturalmente avvicinandosi, per le persone scelte, alla media comune. Tale avvicinamento non può essere accuratamente determinato se le osservazioni sono derivate da una

(1) Citato da J. A. HIGHAM, *On the Value of Selection amongst Assured Lives and its Effect upon the Adjustement of a Scale of Premiums, as between Persons assuring at different Ages*. J. I. A., XX, 1876 (Ristampa).

massa eterogenea di persone, in parte p. e. selezionate all'età di 20 anni che abbiano raggiunto l'età di 50 anni, ed in parte selezionate appena alla stessa età di 50. La probabilità di morte sarà per le prime inferiore, per le seconde superiore a quella che risulterebbe per ogni gruppo separato. Per seguire un metodo bisognerebbe (se si avessero dati sufficienti), costruire tavole distinte per la mortalità di ogni singolo gruppo ».

Il primo che tentò poi di risolvere il problema così formulato fu lo HIGHAM (1) che, nel 1850, sul materiale insufficiente degli assicurati della « *Equitable* », e nell'anno seguente sul materiale delle 17 Compagnie, cioè da 57506 teste fra i 20 e i 65 anni, derivò la vita media e le annualità al 3 $^{0}/_{0}$ per ogni singola età d'entrata. Da queste osservazioni egli credette di poter desumere che gli effetti della selezione si fanno sentire fino a metà del periodo che va dalla selezione stessa all'80^{0} compleanno.

Il tentativo successivo risale allo SPENS (2), che, servendosi delle statistiche della « *Scottish Amicable Life Assurance Society* », istituì il confronto fra mortalità effettiva e probabile durante i primi sei anni di assicurazione per numerose età di entrata.

Ma fu soltanto nel 1863 che, con la pubblicazione del materiale delle 20 compagnie britanniche, il quale comprendeva 127471 teste, raccolto per la tavola di mortalità H^M, si dispose di una massa di cifre sufficiente per risolvere il problema. È vero peraltro che la prima conclusione tratta dall'osservazione della influenza che ha la selezione sul decorso della mortalità nei primi anni, fu piuttosto modesta, perchè infatti si decise di costruire, accanto alla tavola H^M comune, una tavola troncata $H^{M\,(5)}$, nella quale sono semplicemente trascurate le osservazioni dei primi $4\frac{1}{2}$ anni di assicurazione.

Il KING (3) si servì del materiale della tavola H^M per istituire

(1) HIGHAM, *The Value of the Selection as exercised by the Policyholders against the Company*, J. I. A., I.

(2) WILLIAM SPENS, *Observations in presenting to the Institute Tables of the Mortality Experience of the S. A. L. A. S. from* 1826 *to* 1860, J. I. A., X.

(3) GEORGE KING, *On the Mortality amongst Assured Lives and the Requisite Reserves of Life Offices*, 1876, J. I. A., XIX.

nel 1876 tavole di mortalità complete per le età di 20, 25, 30..... fino a 65 anni. Egli quindi battè pure la via segnata dai predecessori, ch'era quella di costruire delle tavole di mortalità per le singole età di entrata, spezzettando così la tavola comune in tante tavole parziali, quante sono le età di entrata. È intuitivo che con questo metodo non si sarebbe mai arrivati a una soluzione che ammettesse una pratica applicazione.

Fu lo SPRAGUE (1) che portò un'idea nuova e feconda, e presentò al riguardo una relazione allo *Institute of Actuaries* nel 1878. Egli suppose semplicemente che l'effetto della selezione si estingua dopo un certo numero di anni, di modo che le singole tavole di selezione sboccano tutte in una comune dopo i primi anni di assicurazione, ch'egli limitò a 5. Egli costruì in questo modo le sue tavole di selezione a completamento della tavola troncata $H^{M\,(5)}$.

È evidente la genialità della soluzione, che permette di afferrare e di esprimere l'essenza del fenomeno in una forma maneggiabile e utilizzabile anche per scopi pratici. Infatti la soluzione era definitiva: tutte le indagini che tendevano ad esprimere l'effetto della selezione sulla mortalità ricorsero in seguito allo schema creato dallo SPRAGUE. Solo, il numero degli anni di selezione varia fra un minimo di 3 e un massimo di 10.

Tuttavia negli ultimi tempi si è proposta una modifica delle tavole di selezione, la quale senza alterarne la sostanza, ne rende più facile la costruzione, più logica la struttura e più semplice l'applicazione. Si tratta di idee di cui si trovano già accenni in due comunicazioni di GEORGE KING allo *Institute of Actuaries* negli anni 1921-1922, come rilevato dall'INSOLERA al recente Congresso Internazionale degli Attuari a Roma. Fu però L'INSOLERA stesso che in un lavoro presentato al Congresso Internazionale degli Studi sulla Popolazione tenutosi a Roma (2), diede a tali idee una forma concreta che consideriamo come definitiva.

(1) T. O. SPRAGUE, *On the Construction and Use of a Series of Select Mortality Tables, to be employed in combination with Institute* $H^{M\,(5)}$ *Table.* J. I. A., XXI, XXII.

(2) FILADELFO INSOLERA, *Sulla mortalità degli assicurati in rapporto alla mortalità generale della popolazione.* Atti, Vol. VII, Roma, 1934, pag. 737.

Secondo questa ipotesi la differenza fra la mortalità delle tavole aggregate e quella delle tavole di selezione, a parità di ogni altra condizione, appare come il prodotto di una funzione della sola età x dell'individuo per una funzione della sola durata t, trascorsa dall'epoca della selezione. Il tasso istantaneo di mortalità durante il periodo di selezione è dato allora da

$$\mu_x - \mu_{[x-t]+t} = \varphi_x \, \psi_t.$$

la quale permette la dimostrazione che la funzione φ_x è uguale o proporzionale al tasso μ_x, sicchè in definitiva è

$$\mu_{[x-t]+t} = \mu_x \, z_t, \qquad z_t = 1 - \varrho \, \psi_t,$$

supponendo che tale rappresentazione pratica sussista per $t \leq 5$.

Questo risultato permette di dedurre facilmente dalla tavola troncata le tavole selezionate degli assicurati, purchè si conoscano i valori della funzione z_t. Secondo l'Insolera il fattore di correzione selettiva z_t risulta pressochè costante e immutato attraverso il tempo e lo spazio, ciò ch'egli dimostra con esempi numerici per le esperienze italiane, svedesi, inglesi e tedesche.

Un analogo ragionamento è stato applicato nella costruzione delle tavole selezionate delle 13 Compagnie Svedesi (1), ove si pose

$$z_t = 1 - 0{,}5\left(1 - \frac{t}{5}\right)^2.$$

Voglio rilevare che l'ipotesi dell'Insolera è molto plausibile perchè significa soltanto supporre che l'effetto della selezione sia indipendente dall'età dell'assicurato. Se noi ammettiamo che la durata della selezione goda di questa proprietà, *a fortiori* possiamo concedere che anche durante il breve periodo in cui la selezione si fa sentire, questo effetto decresca su per giù nello stesso modo per tutte le età. Infatti, sarebbe senza valore pratico il tener conto di quelle minime oscillazioni che si verificano nelle curvette riproducenti il periodo di sele-

(1) Petrus Mattson, *Mortality in Industrial Life Insurance*, Pubblicazione della compagnia «De Förenade», Stoccolma, 1933, pag. 162.

zione delle singole età. L'introduzione di un fattore indipendente dall'età equivale in questo caso agli effetti di una perequazione meccanica. D'altra parte i vantaggi di questo perfezionamento sono evidenti. Infatti, basterebbe determinare la funzione $z(t)$ per alcuni gruppi di età, oppure per tutta la massa delle persone sotto osservazione un'unica volta, e applicarla poi alla tavola troncata, per ottenere immediatamente la tavola di selezione. D'altra parte, anche nelle formule derivate da una tavola di selezione, l'esistenza della relazione in questione deve permettere delle semplificazioni. È quindi da augurarsi che questo metodo trovi riconoscimento generale, e che gli studiosi si dedichino ad esaminare gli effetti che la sua applicazione ha sul calcolo dei premi e delle riserve.

II

Allo splendido successo scientifico delle tavole di selezione non corrisposero però le loro pratiche applicazioni. Nel corso dei decenni sorsero numerose tavole di mortalità per assicurati nella forma di tavole di selezione ideata dallo SPRAGUE, ma, per quanto riguarda la determinazione dei premi e delle riserve, le compagnie continuarono a servirsi delle tavole di aggregati.

Ora, in un campo dell'industria dove la scienza ha tanta voce come nell'assicurazione sulla vita, questo fatto risulta alquanto sorprendente e dà adito a vari quesiti: in primo luogo quali siano le ragioni che trattengono gli attuari dal fare largo uso delle tavole di selezione; poi, a quali conseguenze porti il non tener conto della selezione; e infine — qualora, com'è da supporre, valide ragioni determinino l'astensione degli attuari dalle tavole di selezione — se esistano dei metodi di approssimazione i quali consentano di arrivare agli stessi risultati che fornirebbero le tavole di selezione, pur servendosi di tavole più semplici.

Se riflettiamo anzitutto al primo di questi quesiti, cioè alle ragioni del limitato uso delle tavole di selezione nella pratica dell'assicurazione, la risposta è piuttosto facile. La scienza attuariale è una scienza applicata, essa sta cioè al servizio di istituzioni economiche, le quali tendono non soltanto a ottenere risultati per quanto possibile scientificamente esatti, ma a raggiungerli anche col minor costo possibile. Dato che in linea generale un aumento di esattezza è congiunto ad una maggiore spesa, deve esistere un « *optimum* » che corrisponda alla massima convenienza dell'assicuratore. E pare che appunto quando si voglia passare dall'applicazione delle tavole di aggregati a quella delle tavole di selezione, i vantaggi che l'assicuratore può promettersi da una più precisa determinazione di premi, riserve o altro, non risultino compensati dal maggiore dispendio per il lavoro dipendente dall'uso di queste tavole.

Generalmente le tavole di mortalità servono per il calcolo dei premi e delle riserve matematiche ed entrano nella loro determinazione accanto al saggio d'interesse, se si tratta di premi e di riserve puri; ed inoltre al caricamento, se abbiamo da fare con premi e riserve lordi. Da ciò segue che, se mai, l'influenza della tavola di mortalità dev'essere più importante per la commisurazione dei valori puri che di quelli lordi.

Ora, se analizziamo un poco l'effetto che possono avere questi elementi che contribuiscono al calcolo del premio, rileviamo anzitutto che il saggio d'interesse oscilla nei singoli paesi intorno ad un limite uniforme, il che si esprime molte volte anche in qualche provvedimento governativo che fissa sia il saggio d'interesse tecnico stesso, sia il saggio massimo ammesso. Ma anche a prescindere da queste influenze esterne, è lecito affermare che il saggio d'interesse tecnico nell'assicurazione sulla vita, in questi ultimi 50 anni, si è mantenuto sul continente europeo entro i limiti del $3\,^1/_2$ e del $4\,^0/_0$. Certi leggeri sorpassi, o sono piuttosto apparenti, come p. e. in Francia, dove da alcuni anni vige un interesse massimo legale del $4\,^1/_4\,^0/_0$, ma compensato praticamente da un adeguato aumento dei caricamenti; o — come in certi paesi dell'Europa centrale, dove accanto alle tariffe ufficiali calcolate al $4\,^0/_0$, sono in uso anche le così dette « tariffe minime », calcolate al $4\,^1/_2\,^0/_0$, che servono però soltanto per i casi di concorrenza — rappresentano piuttosto un'anomalia.

In considerazione di ciò possiamo sostenere che le oscillazioni dei premi dovute al saggio d'interesse saranno contenute nei limiti che corrispondono ad un margine del $\frac{1}{2}$ %. È facile misurare tale influenza col confronto di tariffe calcolate con la stessa tavola di mortalità, ma con saggi d'interesse, una volta del 3 $\frac{1}{2}$ % e l'altra volta del 4 %. Evidentemente l'influenza sarà più sensibile nelle assicurazioni di lunga durata che in quelle dove si formano presto riserve notevoli. Dai tabellini seguenti (Tab. 1) si può rilevare che ad una differenza del $\frac{1}{2}$ % nel saggio d'interesse corrisponde, per le assicurazioni miste e la durata di 20 anni, una differenza media del 5%.

Un tale scarto è certamente notevole, ma perde d'importanza se teniamo presente quanto detto prima, che cioè in un dato territorio, il saggio d'interesse delle compagnie che vi operano è di solito identico e che cambiamenti dei saggi stessi avvengono ordinariamente in pari tempo per tutti gli assicuratori.

Tenendo ferma la tavola di mortalità, il premio puro *cresce* col *diminuire* del saggio d'interesse. Per le tariffe più comuni a premio costante, ciò risulta immediatamente dalle note disuguaglianze di STEFFENSEN (1), qualora si consideri che il premio annuo è null'altro che la media ponderata dei singoli premi di rischio. P. e. per l'assicurazione temporanea in caso di morte si ha:

$$ {}_nP_x = \frac{{}_{|n}A_x}{{}_{|n}a_x} = v \, \frac{\Sigma_t \; {}_tE_x \, q_{x+t}}{\Sigma_t \; {}_tE_x} $$

ed in questo caso sarà sempre ${}_nP'_x < {}_nP_x$ qualora ${}_nP'_x$ e ${}_nP_x$ corrispondano a saggi i' e i, per i quali $i' > i$. Tale disuguaglianza è implicitamente legata al fatto che le probabilità di morte crescano con l'età.

III

Per quanto riguarda la tavola di mortalità, è chiaro ch'essa può avere un effetto notevolissimo sull'andamento dei premi. Per le età di entrata che hanno valore pratico per l'assicura-

(1) J. F. STEFFENSEN, *Some Recent Researches in the Theory of Statistics and Actuarial Science*, Cambridge, 1930, pagg. 29-35.

zione sulla vita, diciamo fra i 20 e i 60 anni, i premi di una data tavola possono restare al di sotto di quelli derivati da un'altra tavola; oppure può essere che i premi risultino inferiori per qualche gruppo di età di entrata e superiori per qualche altro gruppo. Ma anche a questo riguardo, entro i limiti di un dato territorio, si verificano tendenze verso l'uniformità, sia che esista una tabella di mortalità nazionale, utilizzata da tutte le compagnie che lavorano nel paese, sia che queste applichino tabelle derivate dalle proprie osservazioni che di solito non si distinguono essenzialmente da quelle della tabella nazionale; oppure, dove una tavola nazionale manca, che sia prescritta o raccomandata dalle autorità di sorveglianza l'applicazione di una data tavola; oppure infine che tutti gli assicuratori o la maggioranza di essi ricorrano a una delle tavole di maggiore applicazione internazionale, come furono in passato tanto la tavola H^M, quanto, più tardi, quella O^M inglese. Nondimeno, dato che una certa libertà nella scelta della tavola di mortalità esiste pure nel maggior numero dei paesi, ne possono derivare delle differenze nei premi anche abbastanza sensibili. Gli specchietti (Tab. 2) dimostrano come l'uso di tavole di mortalità diverse influisca sull'ammontare dei premi, a parità di tasso d'interesse e per la stessa forma di assicurazione.

Tuttavia anche queste considerazioni, come quelle sull'effetto del saggio d'interesse, sussistono soltanto finchè ci muoviamo nel campo dei premi puri. Dal momento invece che nella commisurazione dei premi entra ancora un terzo fattore, che è quello del caricamento, la situazione cambia d'aspetto. Il caricamento si compone, di solito, di tre elementi, cioè delle quote destinate a coprire le spese di acquisto, quelle di gestione e quelle d'incasso. Dato l'uso di commisurare la tangente per le spese di acquisizione in una percentuale della somma assicurata, ma ripartita su tutta la durata dell'assicurazione, quella per le spese di gestione in una percentuale della somma assicurata, pagabile annualmente, ed infine quella per le spese d'incasso in una percentuale del premio stesso, risulta un meccanismo talmente malleabile che un abile attuario, con opportuna scelta dei parametri, può trasformare determinati premi puri in premi di tariffa tali da avvicinarsi a qualsiasi altra tariffa dello stesso genere già esistente. Voglio illustrare questo asserto (Tab. 3) dimostrando con un esempio teorico, come da un premio puro calcolato secondo le basi O^M, 4 $^0/_0$, si possano ottenere dei premi lordi della più grande varietà.

Però, non solo è possibile di far corrispondere a un dato sistema di premi puri infiniti sistemi di premi lordi, variando i parametri del caricamento, ma anche, stabiliti due sistemi corrispondenti di premi puri e lordi, si può dimostrare ch'è possibile di passare dall'uno all'altro mediante un numero infinito di parametri α, β, γ.

Essendo α, β, γ i caricamenti per le spese di acquisto, di incasso e di gestione, il premio lordo della mista risulta, come noto, dalla formula

$$(1) \qquad \pi_{x,\overline{n|}} = \left(P_{x,\overline{n|}} + \frac{\alpha}{{}_n\mathrm{a}_x} + \gamma\right)\frac{1}{1-\beta}$$

che, con riguardo alla relazione $P_{x,\overline{n|}} = \dfrac{1}{{}_n\mathrm{a}_x} - d$ si trasforma in

$$(2) \qquad \pi_{x,\overline{n|}} = \frac{1+\alpha}{1-\beta} P_{x,\overline{n|}} + \frac{\alpha\, d+\gamma}{1-\beta} = a\, P_{x,\overline{n|}} + b\,;$$

cioè il premio lordo dipende unicamente da *due* parametri anzichè da tre. Ciò equivale a dire che esiste una infinità di sistemi (α, β, γ) che conducono agli stessi parametri a e b e perciò allo stesso sistema di premi lordi. Si noti che in uno di questi due parametri entra pure il saggio di interesse.

Fra i 63 premi indicati nella tabella 3, certi valori si scostano poco tra loro. Ciò è dovuto al fatto che i parametri α, β, γ che servono per la determinazione di tali premi, per quanto differenti tra loro, corrispondono a valori a e b quasi eguali.

Dalle relazioni

$$\frac{1+\alpha}{1-\beta} = a, \qquad \frac{\alpha\, d+\gamma}{1-\beta} = b$$

scegliendo come parametro $k = 100\,\beta$, risulta la seguente rappresentazione parametrica di $(\alpha_k, \beta_k, \gamma_k)$:

$$\alpha_k = a\left(1 - \frac{k}{100}\right) - 1$$

$$(3) \qquad \beta_k = \frac{k}{100}$$

$$\gamma_k = (b - a\,d)\left(1 - \frac{k}{100}\right) + d.$$

Osservando ancora che per $k = 0$

$$\alpha_o = a - 1$$

$$\beta_o = 0$$

$$\gamma_o = b - (a - 1)\,d,$$

le (3) possono essere scritte nella seguente forma:

$$\alpha_k = \alpha_o - (1 + \alpha_o)\frac{k}{100}$$

$$\beta_k = \frac{k}{100}$$

$$\gamma_k = \gamma_o + (d - \gamma_o)\frac{k}{100}.$$

Essendo

$$i = 4\,\%_0, \quad \text{risulta} \quad d = 0{,}03846$$

e ponendo

$$\alpha = 0{,}03 \qquad \beta = 0{,}03 \qquad \gamma = 0{,}003$$

si ottiene

$$a = 1{,}0619 \qquad b = 0{,}0428$$

e

$$\alpha_o = 0{,}0619 \qquad \beta_o = 0 \qquad \gamma_o = 0{,}00190.$$

Così la classe $(\alpha_k, \beta_k, \gamma_k)$ corrispondente alla coppia

$$\begin{cases} a = 1{,}0619 \\ b = 0{,}00428 \end{cases}$$

si presenta nella forma parametrica:

$$\alpha_k = 0{,}619 - \frac{k}{100}1{,}0619$$

$$\beta_k = \frac{k}{100}$$

$$\gamma_k = 0{,}00190 + \frac{k}{100}0{,}03656.$$

Per i diversi valori di k si trovano i valori $(\alpha_k, \beta_k, \gamma_k)$ qui riprodotti:

k	α_k	β_k	γ_k
0	0,0619	0,00	0,00190
1	0,0513	0,01	0,00227
2	0,0407	0,02	0,00263
3	0,0300	0,03	0,00300
4	0,0194	0,04	0,00363
5	0,0088	0,05	0,00373
6	0,0018	0,06	0,00409

La formula $\pi = a\,P + b$ consente di riconoscere, mediante un metodo grafico, se, dato un certo sistema arbitrariamente prestabilito di premi lordi, lo si può ottenere caricando i premi puri P secondo la formula:

$$\pi = \frac{P + \frac{\alpha}{a} + \gamma}{1 - \beta}.$$

Dato che questa formula rappresenta π quale funzione lineare di P, la condizione necessaria e sufficiente perchè si possa fare quanto detto, sia in modo esatto, sia approssimativamente, è che, rappresentando cartesianamente le coppie $[\pi, P]$, tutti i punti così ottenuti giacciano su una medesima retta, oppure si discostino di poco da una retta. Se ciò non accade per l'intero sistema di premi, e non è quindi possibile di arrivare ai premi lordi desiderati con un unico sistema di caricamenti, c'è ancora la possibilità di esaminare se l'andamento rettilineo si verifichi almeno per dei sistemi parziali significativi, come per singole tariffe o per singole durate di una tariffa, o per sistemi definiti da altri criteri più complessi e forse anche artificiosi (p. e. in funzione dell'età alla scadenza, o anche di una funzione meno significativa dell'età e della durata).

Una volta verificato che per un certo sistema totale o parziale i punti sono praticamente allineati, i parametri a e b si potrebbero determinare per es. col metodo dei minimi quadrati. Essendo cioè $[\pi, P]$ delle successioni di n valori di premi puri e lordi, si tratta di determinare a e b in modo che l'espressione

$$F(a, b) = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{n} [\pi_\nu - (a P_\nu + b)]^2$$

sia minima. Da questa condizione risultano immediatamente le due equazioni

$$\frac{\partial F}{\partial a} = \sum_{\nu=1}^{n} (\pi_\nu - a P_\nu - b) P_\nu = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} = \sum_{\nu=1}^{n} (\pi_\nu - a P_\nu - b) = 0$$

che conducono ai valori a e b cercati.

Naturalmente, ammettendo una tale libertà nella scelta dei sottogruppi, è evidente che si può giungere in infiniti modi a dei premi lordi fissati del tutto arbitrariamente. E tanto basta a mostrare che si perde così ogni significato tecnico ragionevole. Tali metodi sono perciò condannabili perchè atti a minare il valore del lavoro attuariale. Sarebbe quindi indicato di opporsi a queste tendenze, dove esse affiorano, e di reclamare ad alta voce il ritorno ai criteri della scienza.

Da quanto precede è facile dedurre che l'impiego delle tavole di selezione per il calcolo dei premi può avere importanza soltanto se la loro influenza è molto sensibile. Ma questo non è affatto il caso per i premi annui. Lo prova il confronto fra i premi puri per l'assicurazione a vita intera e per la mista calcolati secondo le tavole O^M e $O^{[M]}$ e riprodotti nella Tab. 4 (1).

(1) British Offices Life Tables (1893): *Tables deduced from the Graduated Experiences of Whole Life Participating Assurances on Male Lives*; O^M, *Aggregate Tables*, London 1902. — Id. $O^{[M]}$, *Select Tables*, London 1907.

Si rileverà che le differenze sono esigue e comunque tali da passare completamente in seconda linea di fronte al gioco dei caricamenti.

Coi metodi sopra accennati non sarebbe difficile derivare dai premi puri della tavola di aggregati, con dati parametri a e b un sistema di premi lordi e da questo risalire, attraverso altri parametri, da determinare col metodo dei minimi quadrati, ai premi puri della tavola di selezione, o almeno avvicinarvisi notevolmente. Ne consegue che, per il calcolo dei premi lordi, le tavole di selezione non possono avere un'importanza tale da imporre il loro impiego.

IV.

Se passiamo ora a considerare l'influenza delle basi tecniche sulle riserve matematiche pure, essa può essere afferrata con una misura indicata dal Tauber (1) già nell'anno 1912.

Essendo p. e. per l'assicurazione a vita intera la riserva matematica eguale a:

$$ {}_tV_x = 1 - \frac{\mathrm{a}_{x+t}}{\mathrm{a}_x}, $$

risulta che

$$ {}_tV'_x \leqq {}_tV_x \qquad \text{se vale:} \quad \frac{\mathrm{a}_{x+t}}{\mathrm{a}_x} \leqq \frac{\mathrm{a}'_{x+t}}{\mathrm{a}'_x}. $$

Considerando ora nel continuo la funzione $\bar{a}_x$ secondo una data tavola di mortalità e definendo con $R_x = \frac{d}{dx} lg\, \bar{a}_x$ l'intensità di morte di questa tavola, si ha

$$ \frac{\bar{a}_{x+t}}{\bar{a}_x} = e^{-\int_0^t R_{x+t} dt} $$

(1) A. Tauber, *Der Vergleich der Prämienreserven der verschiedenen Grundtafeln*, in *Osterr. Revue,* Vol. XXXVII, 1912, fasc. 6.

Ora è

$$R_x = -\frac{1}{\overline{a}_x}\frac{d}{dx}\overline{a}_x = \frac{-(\mu_x+\delta)\,\overline{a}_x+1}{\overline{a}_x} =$$

$$= \frac{1}{\overline{a}_x} - \delta - \mu_x = \overline{P}_x - \mu_x.$$

L'espressione $R_x = \overline{P}_x - \mu_x$ viene chiamata dal TAUBER «intensità di riserva». In base a tali formule egli ha potuto dimostrare che se l'intensità di riserva per una data tavola di mortalità e per un dato intervallo di età, è sempre inferiore di almeno $k\,^0/_0$ a quella per un'altra tavola di mortalità, allora la riserva matematica V' della prima tavola è inferiore alla riserva matematica V della seconda tavola di $k\,(1 - V)\,^0/_0$.

Lo stesso vale per tutte le assicurazioni miste che hanno la stessa età alla scadenza, p. e. 60 o 65 anni. In questo ultimo caso si ha p. e.:

$$R_x^{(65)} = \overline{P}_{x,\,\overline{65-x}|} - \mu_x.$$

Tali intensità dipendono anche dal saggio d'interesse, però esso non altera molto l'andamento delle intensità per due tavole differenti. Tuttavia si può anche renderle indipendenti dal saggio d'interesse; le formule contengono allora soltanto espressioni legate intimamente con la tavola di mortalità e cioè la vita media e la intensità di morte. Si ha:

$$R_x = \frac{1}{\overset{\circ}{e}_x} - \mu_x\,, \qquad \text{rispettivamente,} \qquad R_x^{(65)} = \frac{1}{\overset{\circ}{e}_{x,\,\overline{65}|}} - \mu_x.$$

Le tabelle allegate (Tab. 5) dànno un'idea sull'andamento numerico delle intensità.

Tali confronti dimostrano che la tavola di mortalità può avere una forte influenza sulla misura della riserva, e ciò molto più nelle assicurazioni a vita intera che nelle assicurazioni miste, ma che la riserva dipende più dalla durata dell'assicurazione che dalla tavola di mortalità (Tab. 6).

Per quanto riguarda il saggio d'interesse, le cose si presentano in modo più semplice. Basta dimostrare che per $i' > i$

$$\frac{\overline{a}'_{x+t}}{\overline{a}'_x} > \frac{\overline{a}_{x+t}}{\overline{a}_x}.$$

Ciò risulta immediatamente dalle disugualianze dello STEFFENSEN e forse ancora meglio in base alle intensità del TAUBER. Se per $i' > i$

$$\frac{1 - V_t'}{1 - V_t} > 1$$

si ha:

$$\frac{1 - V_t'}{1 - V_t} = e^{-\int_0^t (P'_{x+\tau} - P_{x+\tau})\, d\tau} = e^{\vartheta} > 1$$

dato che

$$\vartheta = \int_0^t (P_{x+\tau} - P'_{x+\tau})\, d\tau > 0, \quad \text{se } i' > i.$$

Se vogliamo completare queste considerazioni teoriche con l'esame di cifre concrete, possiamo limitarci al confronto delle riserve calcolate al $3^1/_2$ ed al $4^0/_0$ che sono riprodotte nella Tab. 7.

Si scorge che la differenza, come del resto è naturale, si accresce sempre più verso la metà della durata dell'assicurazione, per decrescere poi di nuovo verso la fine dell'assicurazione. Ma in relazione a quanto fu detto a proposito del saggio d'interesse nei riguardi dei premi, dato che tutto ciò vale anche per le riserve, almeno entro un dato territorio, si può affermare che il saggio d'interesse sarà di solito identico per tutte le imprese di assicurazione e che esso può quindi essere trascurato nelle nostre ulteriori considerazioni.

Arriviamo quindi alla conclusione che le riserve pure possono variare entro limiti molto notevoli secondo le basi tecniche scelte. Quando però passiamo dalle riserve pure a quelle lorde, si verifica di nuovo un fatto che scema il valore delle differenze rilevate finora.

Nel calcolo delle riserve lorde si tiene conto sia delle spese di acquisto, sia di quelle di gestione. La formula generale per una riserva matematica lorda è data da

$$V^* = A_{x+t,\, \overline{n-t|}} + \gamma \, {}_{|n-t}\mathrm{a}_{x+t} - P^* \, {}_{|m-t}\mathrm{a}_{x+t}$$

dove il premio

$$P^* = \frac{A_{x,\overline{n|}} + \alpha + \gamma\, {}_{|n}\mathrm{a}_x}{{}_{|m}\mathrm{a}_x}$$

è il premio d'inventario, cioè il premio puro aumentato del caricamento di gestione e di quello di acquisto.

Le formula sopra indicata può essere trasformata in:

$$V_t^* = V_t - \alpha \frac{{}_{|m-t}\mathrm{a}_{x+t}}{{}_{|m}\mathrm{a}_x} + \gamma \left({}_{|n-t}\mathrm{a}_{x+t} - \frac{{}_{|n}\mathrm{a}_x}{{}_{|m}\mathrm{a}_x}\, {}_{|m-t}\mathrm{a}_{x+t} \right)$$

Se $n = m$, diventa

$$V^* = V_t - \alpha \frac{{}_{|n-t}\mathrm{a}_{x+t}}{{}_{|n}\mathrm{a}_x}$$

Per le assicurazioni, quindi, per le quali la durata del pagamento del premio m, coincide con la durata dell'assicurazione n, ed il premio è pagabile in forma costante, il caricamento di gestione si elimina e non ha influenza sull'ammontare della riserva zillmerata.

Siccome ciò vale per il grosso delle assicurazioni, vogliamo trascurare l'elemento «spese di gestione» e limitarci ad analizzare soltanto l'effetto delle spese di acquisizione. Ora, l'ammortamento di queste spese agli effetti del bilancio è un fatto alquanto arbitrario perchè può aver luogo sia immediatamente alla conclusione dell'assicurazione, ed in questo caso otteniamo le riserve matematiche pure, ovvero può essere distribuito su una serie più o meno lunga di anni, con un massimo pari alla durata del pagamento del premio, corrispondentemente alla realtà. In quest'ultimo caso, abbiamo l'effetto della spesa di acquisizione nella misura massima.

Le formule si presentano allora come segue:

$$V_t^*(k) = V_t - \alpha \frac{{}_{|k-t}\mathrm{a}_{x+t}}{{}_{|k}\mathrm{a}_x} \quad \text{per } t < k,$$

$$V_t^*(k) = V_t \qquad\qquad » \quad t \geqq k.$$

Nella Tab. 8 ho indicato i valori della riserva per un'assicurazione mista calcolata con vari caricamenti per spese di acquisizione e varie durate di ammortamento.

Da un confronto di questi valori con quelli dati nelle tabelle precedenti (Tab. 6) si desume senz'altro che l'influenza del caricamento, specialmente nei primi anni, è tale da soverchiare sensibilmente quella eventuale derivante da una differente tavola di mortalità. Basti il fatto che lo « zillmeraggio », cioè il metodo di calcolare la riserva tenendo conto delle spese di acquisizione, può portare perfino a valori negativi nella riserva stessa! Troviamo dunque anche qui lo stesso fenomeno che già abbiamo osservato trattando dei premi, cioè che le differenze dovute a un'accurata scelta delle basi tecniche di primo ordine, possono essere annullate da quella delle basi di secondo ordine e dal metodo di applicarle. Tuttavia è da tener presente che in molti paesi, come anche in Italia, non è permesso di calcolare le riserve altrimenti che secondo il metodo puro, ed allora effettivamente l'influenza delle tavole di mortalità può essere notevole. Però qui si tratta di un'indagine di carattere generico e perciò dobbiamo prendere in considerazione la situazione esistente nel maggior numero dei paesi.

L'analogia fra premi e riserve, rilevata finora su tutta la linea, ci fa anticipare la risposta al quesito riguardante l'influenza delle tavole di selezione sulla misura della riserva. Sul valore numerico delle differenze fra le riserve calcolate con una tavola di aggregati e quelle determinate con la corrispondente tavola di selezione informa la Tab. 9. Risulta che queste ultime riserve sono superiori alle altre, in qualche punto anche sensibilmente, in particolare all'inizio dell'assicurazione. Se si adoperano riserve pure, tali differenze non sono trascurabili; infatti l'impiego di tavole di aggregati corrisponde a uno zillmeraggio latente (1).

Se invece si calcolano riserve lorde, il diffalco dovuto alla tavola di selezione si confonde in quello dovuto all'ammortamento delle spese di acquisizione ed il problema perde d'importanza. Tuttavia esso ha maggior peso per le riserve che per i

(1) Vedasi P. Smolensky, *Le teorie della riserva matematica nell'assicurazione sulla vita*, in « Giornale di Matematica finanziaria », 1923.

premi, e ciò particolarmente quando si tratti di assicurazioni con partecipazione agli utili. Mentre gli spostamenti che si verificano nell'ammontare della riserva, a seconda che si calcoli con tavole di aggregati o di selezione, possono sembrare trascurabili per una impresa alla quale interessi soltanto l'utile globale, quando si cerca invece di fissare nel modo più equo quale quota dell'utile complessivo sia dovuta ogni anno al singolo assicurato, è necessario calcolare la riserva matematica con la maggior esattezza possibile, e allora, accanto a uno zillmeraggio conforme all'aggravio reale, s'impone l'impiego di tavole di selezione come quelle che più si avvicinano al decorso effettivo della mortalità.

V

Dopo le considerazioni finora svolte, si presenta spontanea la domanda se valga la pena di perfezionare le basi tecniche, dato che alla fin fine, gli effetti di ogni miglioramento vengono ad esser annullati dal modo come esse vengono applicate. Ritengo che sarebbe errato di abbandonarsi a tanto scetticismo. Infatti c'è il pericolo che, non conoscendo i valori scientificamente esatti, gli scarti risultanti dai vari metodi applicati tendano tutti nella stessa direzione, senza compensarsi. Ciò avviene effettivamente quando una compagnia che si serve di una tavola di aggregati, fa inoltre uso dello zillmeraggio, come detto sopra. Infatti, l'impiego di una tavola di aggregati significa già uno scarto sulle riserve matematiche nei primi anni di assicurazione, scarto che può essere considerato lecito quando l'ammortamento delle spese di acquisizione avviene immediatamente. Se invece si fa un ulteriore diffalco per spese di acquisizione non ammortizzate, le riserve risultano necessariamente insufficienti.

La possibilità che si verifichino tali concomitanze ci obbliga a continuare tutte le indagini scientifiche atte a perfezionare viepiù i metodi attuariali, salvo a servirsi poi di quelli che meglio ci convengono per un dato scopo. La deduzione che risulta da ciò nei riguardi delle tavole di selezione, è che si debbano cercare delle approssimazioni tali da condurre agli stessi risultati, evitandone però le complicazioni.

A tale proposito gli studi dell'INSOLERA possono dimostrarsi forse di utilità anche per il calcolo della riserva, e precisamente ove si riesca a trovare delle relazioni semplici fra le riserve calcolate in base alla tavola «selezionata» e a quella «ultimata». P. e. dato che i premi annui della mista variano poco col variare della tavola di mortalità, risulta dalla formula dell' INSOLERA

$$\mu_{[x-t]+t} = \mu_x \, z_t$$

che la differenza fra i premi di risparmio relativi alla tavola «ultimata» e «selezionata» nei primi cinque anni, ammontano a

$$P_t^r \, (1 - z_t),$$

P_t^r significando il premio di rischio nel t-esimo anno d'assicurazione. Ritengo che su questa via si debbano continuare le ricerche essendoci fondata speranza di raggiungere risultati interessanti.

Un altro procedimento per ottenere delle semplificazioni nell'impiego delle tavole di selezione sarebbe quello di costruire una tavola di aggregati che soddisfacesse a date condizioni, alle quali corrispondono i risultati derivati da una tavola di selezione. Il VAJDA p. e. (1), in un notevole lavoro presentato al Congresso degli Attuari di Roma, ha tentato di seguire questa strada partendo dalla condizione che l'invariante in questione sia il monte premi. Forse più interessante sarebbe stato di stabilire come invariante la riserva matematica. Ma anche il problema posto dal VAJDA risulta insolubile giacchè, perfino per le forme di assicurazione più semplici, si rende necessaria la costruzione di tavole di mortalità dipendenti dal saggio d'interesse. È evidente che ciò non rappresenterebbe una semplificazione, a prescindere anche dall'irrazionalità inerente a tale soluzione. Comunque, il lavoro del VAJDA ha il merito di aver dimostrato non essere possibile la sostituzione di una tavola di selezione

(1) ST. VAJDA, *Über Selekttafeln und Aggregattafeln,* Atti del X Congresso Internazionale degli Attuari, Roma, 1934.

con una tavola di aggregati, che fornisca gli stessi premi, e tanto meno che conduca alle stesse riserve matematiche.

Una terza via l'ho segnalata io stesso con le « tavole compatte » (1) dove è trascurata completamente l'età ed è tenuto conto soltanto della durata trascorsa dall'inizio dell'assicurazione. Tuttavia l'uso di queste tavole sarebbe limitato al calcolo delle riserve, per il quale però esso si dimostra di notevole semplicità.

Comunque, è ancora aperto un vasto campo agli studiosi che vorranno dedicarsi alla ricerca della soluzione di tutti i problemi connessi all'applicazione pratica delle tavole di selezione.

***

La conclusione che crediamo di poter trarre dalla nostra indagine mi sembra sia la seguente:

In tutto il nostro lavoro attuariale si verifica oggi una situazione paradossale: mentre da un lato esageriamo nell'esattezza, con grande dispendio di lavoro, cercando una precisione che di fronte ai risultati complessivi è fuori di luogo, dall'altra pecchiamo applicando certi metodi grossolani che annullano gli effetti non soltanto dell'eccessiva precisione usata, ma anche quelli dell'esattezza contenuta nei limiti necessari. Una riforma di questi nostri metodi sarebbe quindi indicata. Ciò non significa che possiamo rinunciare *a priori* a tutte le indagini che portano a metodi sempre più raffinati per accontentarci di approssimazioni più o meno rozze, ma al contrario c'impone il dovere di perfezionare sempre più i nostri strumenti tecnici per poter poi, a ragione veduta, sostituire ai procedimenti esatti, ma troppo complicati, delle approssimazioni di cui conosciamo esattamente la portata.

Per scendere dalle considerazioni generali al problema concreto delle tavole di mortalità, si tratta di costruire queste ta-

(1) P. Smolensky, *Sulle tavole compatte di Mortalità*. Atti del II Congresso Nazionale di Scienza delle Assicurazioni, Trieste 1932.

Idem, *Idem.*, Atti nel X Congresso Internazionale degli Attuari, Roma 1934.

vole in modo ch'esse rispecchino, per quanto possibile esattamente, il reale decorso della mortalità degli assicurati e che se ne possano derivare i valori attuariali, per esser poi in grado di sostituire a questi valori altri determinati con metodi più semplici, evitando errori atti a pregiudicare gli interessi della impresa.

TABELLA 1.

Confronto dei premi per due diversi saggi d'interesse : $3\,^1/_2\,^0/_0$ e $4\,^0/_0$

TARIFFA MISTA E A VITA INTERA

O^M Per 100 di capitale

x	$n = 10$		$n = 15$		$n = 20$		$n = 25$		$\omega - x$	
	$3\,^1/_2\,^0/_0$	$4\,^0/_0$	$3\,^1/_2\,^0/_0$	$4\,^0/_0$	$3\,^1/_2\,^0/_0$	$4\,^0/_0$	$3\,^1/_2\,^0/_0$	$4\,^0/_0$	$3\,^1/_2\,^0/_0$	$4\,^0/_0$
20	8.45	8.23	5.26	5.06	3.71	3.53	2.81	2.65	1.20	1.11
25	8.50	8.28	5.32	5.12	3.78	3.59	2.89	2.73	1.42	1.32
30	8.57	8.34	5.40	5.20	3.86	3.69	2.99	2.83	1.68	1.58
35	8.65	8.42	5.49	5.30	3.98	3.80	3.13	2.97	2 —	1.89
40	8.75	8.53	5.62	5.43	4.14	3.97	3.33	3.17	2.40	2.29
45	8.90	8.68	5.82	5.62	4.38	4.21	3.63	3.47	2.92	2.80
50	9.13	8.91	6.11	5.92	4.76	4.59	4.09	3.99	3.60	3.47
55	9.49	9.27	6.58	6.39	5.34	5.18	4.80	4.65	4.50	4.38
60	10.06	9.85	7.32	7.14	6.26	6.10	5.87	5.73	5.73	5.60

TABELLA 2.

Confronto dei premi per diverse tavole di mortalità.

Per 100 di capitale $i = 4\,\%$

x	H^M	O^M	V	AF	AH_G^M	EM	G
			ASSICURAZIONE A VITA INTERA				
20	1.24	1.11	1.03	1.24	0.98	1.08	1.06
25	1.43	1.32	1.24	1.42	1.18	1.28	1.30
30	1.66	1.58	1.52	1.67	1.42	1.55	1.61
35	1.96	1.89	1.89	1.99	1.73	1.90	1.99
40	2.35	2.29	2.35	2.42	2.12	2.35	2.48
45	2.87	2.80	2.95	2.97	2.63	2.92	3.11
50	3.55	3.47	3.74	3.70	3.27	3.67	3.91
55	4.47	4.38	4.78	4.68	4.12	4.65	4.96
60	5.73	5.60	6.16	6 —	5.23	5.96	6.33
			ASSICURAZIONE MISTA			durata 20	
20	3.64	3.53	3.44	3.63	3.44	3.48	3.42
25	3.70	3.59	3.48	3.66	3.48	3.52	3.50
30	3.76	3.69	3.57	3.73	3.58	3.61	3.61
35	3.86	3.80	3.72	3.85	3.69	3.75	3.78
40	4.01	3.97	3.93	4.03	3.86	3.96	4.02
45	4.26	4.21	4.26	4.30	4.11	4.26	4.38
50	4.64	4.59	4.75	4.73	4.48	4.72	4.90

TABELLA 3.

Premi lordi per un'assicurazione mista : età = 40, durata = 20 *calcolati in base alla formula :*

$$\pi_{40,\overline{20}|} = \left(P_{40,\overline{20}|} + \frac{\alpha}{{}_{|20}a_{40}} + \gamma\right)\frac{1}{1-\beta} \qquad O^M\ 4\ \%$$

per diversi valori α, β, γ.

Per 100 di capitale

γ	0.001			0.002			0.003		
β \ α	0.01	0.02	0.03	0.01	0.02	0.03	0.01	0.02	0.03
0.00	4.14	4.21	4.30	4.24	4.31	4.40	4.34	4.41	4.50
0.01	4.19	4.26	4.34	4.29	4.36	4.44	4.39	4.45	4.55
0.02	4.23	4.30	4.39	4.33	4.40	4.49	4.53	4.50	4.59
0.03	4.27	4.34	4.43	4.38	4.45	4.54	4.48	4.55	4.64
0.04	4.32	4.39	4.48	4.42	4.49	4.58	4.43	4.60	4.69
0.05	4.36	4.43	4.53	4.47	4.54	4.53	4.57	4.64	4.74
0.06	4.41	4.48	4.57	4.52	4.59	4.68	4.62	4.69	4.79

TABELLA 4.

Assicurazione mista

Premi puri per 100 di capitale assicurato 4 %

Durata	$x = 20$		$x = 30$		$x = 40$		$x = 50$	
	O^M	$O^{[M]}$	O^M	$O^{[M]}$	O^M	$O^{[M]}$	O^M	$O^{[M]}$
10	8.23	8.25	8.34	8.29	8.53	8.40	8.91	8.67
15	5.06	5.10	5.20	5.16	5.43	5.32	5.92	5.71
20	3.53	3.57	3.69	3.66	3.97	3.87	4.59	4.40
25	2.65	2.70	2.83	2.81	3.17	3.09	3.94	3.76
$\omega - x$	1.14	1.18	1.58	1.57	2.29	2.21	3.47	3.29

TABELLA 5.

Intensità di riserva per 100 di capitale

per $i = 0$

x	H^M	O^M	AF	AH_G^M
		ASSICURAZIONE A VITA INTERA		
25	1.90	2.05	1.99	2.06
30	2.11	2.23	2.22	2.26
35	2.37	2.43	2.47	2.48
40	2.66	2.69	2.77	2.73
45	3 —	3.01	3.10	3.01
50	3.39	3.38	3.48	3.32
55	3.83	3.81	3.91	3.67
60	4.32	4.28	4.38	4.05
65	4.86	4.80	4.88	4.49
		ASSICURAZIONE MISTA CON SCADENZA A 65 ANNI		
25	2.37	2.52	2.43	2.56
30	2.72	2.84	2.79	2.91
35	3.18	3.26	3.25	3.36
40	3.82	3.86	3.87	3.96
45	4.74	4.77	4.78	4.86
50	6.25	6.28	6.26	6.35
55	9.30	9.32	9.27	9.38
60	18.78	18.82	18.70	18.89

Tabella 6.

Confronto delle riserve al 4 °/₀ per diverse tavole di mortalità

Per 100 di capitale

Assicurazione a vita intera $x = 40$					Assicurazione mista: 40/20				
t	H^M	O^M	AF	AH_G^M	t	H^M	O^M	AF	AH_G^M
1	1.45	1.47	1.55	1.50	1	3.20	3.24	3.24	3.32
2	2.95	2.98	3.14	3.03	2	6.53	6.60	6.61	6.75
3	4.48	4.53	4.76	4.57	3	9.99	10.09	10.09	10.30
4	6.06	6.10	6.41	6.15	4	13.60	13.71	13.72	13.99
5	7.66	7.70	8.10	7.76	5	17.35	17.48	17.48	17.81
10	16.20	16.21	17 —	16.15	6	21.25	21.40	21.40	21.77
15	25.48	25.42	26.53	25.03	7	25.31	25.47	25.47	25.88
20	35.25	35.10	36.41	34.19	8	29.55	29.72	29.72	30.15
25	45.15	44.90	46.29	43.41	9	33.97	34.15	34.12	34.60
30	54.80	54.44	55.79	52.42	10	38.58	38.76	38.73	39.23
35	63.77	63.31	64.53	61.06	11	43.41	43.59	43.54	44.05
40	71.69	71.18	72.18	69.39	12	48.46	48.64	48.58	49.10
					13	53.76	53.93	53.85	54.36
					14	59.32	59.48	59.38	59.89
					15	65.17	65.32	65.21	65.69
					16	71.34	71.47	71.36	71.80
					17	77.86	77.98	77.87	78.24
					18	84.78	84.87	84.77	85.06
					19	92.14	92.19	92.13	92.29
					20	100.—	100.—	100.—	100.—

TABELLA 7.

Confronto delle riserve per due diversi saggi d' int.: $3^1/_2\,^0/_0$ *e* $4\,^0/_0$

TARIFFA MISTA, DURATA 20

O^M

Per 100 di capitale

t \ x	20		30		40		50	
	3 ½ %	4 %	3 ½ %	4 %	3 ½ %	4 %	3 ½ %	4 %
1	3.45	3.28	3.43	3.26	3.40	3.24	3.47	3.32
2	7.02	6.69	6.97	6.64	6.92	6.60	7.04	6.73
3	10.72	10.24	10.63	10.16	10.55	10.09	10.68	10.26
4	14.56	13.93	14.42	13.81	14.31	13.71	14.44	13.89
5	18.53	17.77	18.35	17.61	18.20	17.48	18.31	17.63
6	22.64	21.78	22.42	21.57	22,22	21.40	22.28	21.51
7	26.90	25.94	26.64	25.70	26.40	25.47	26.37	25.50
8	31.32	30.28	31.01	29.99	30.72	29.72	30.59	29.65
9	35.90	34.80	35.56	34.48	35.21	34.15	34.96	33.95
10	40.66	39.52	40.28	39.15	39.87	38.76	39.47	38.43
11	45.60	44.44	45.19	44.03	44.72	43.59	44.17	43.09
12	50.73	49.57	50.29	49.14	49.77	48.64	49.05	47.97
13	56.06	54.92	55.61	54.48	55.04	53.93	54.15	53.10
14	61.60	60.52	61.15	60.07	60.54	59.48	59.51	58.49
15	67.36	66.37	66.92	65.94	66.30	65.32	65.16	64.21
16	73.36	72.49	72.95	72.08	72.34	71.47	71.16	70.30
17	79.60	78.89	79.26	78.54	78.70	77.98	77.54	76.83
18	86.12	85.60	85.85	85.32	85.39	84.87	84.42	83.88
19	92.91	92.63	92.75	92.47	92.48	92.19	91.86	91.57
20	100.—	100.—	100.—	100.—	100—.	100.—	100.—	100.—

Tabella 8.

Riserve zillmerate per varie durate d'ammortamento k e per diversi valori di α

Assicurazione mista: età 40, durata 20; per 100 di capitale

$$V_t^*(k) = \begin{cases} V_t - \alpha \dfrac{{}_{|k-t}\mathrm{a}_{x+t}}{{}_{|k}\mathrm{a}_x}, & \text{se } t < k, \\ V_t, & \text{se } t > k. \end{cases}$$

O^M 4 %

t	α	0.01				0.02				0.03				0.04			
	V_t	$V_t^*(k)$				$V_t^*(k)$				$V_t^*(k)$				$V_t^*(k)$			
		$k=5$	$k=10$	$k=15$	$k=20$	$k=5$	$k=10$	$k=15$	$k=20$	$k=5$	$k=10$	$k=15$	$k=20$	$k=5$	$k=10$	$k=15$	$k=20$
1	3.24	2.42	2.32	2.29	2.27	1.61	1.40	1.34	1.31	0.79	0.48	0.42	0.34	−0.03	−0.44	−0.53	−0.63
2	6.60	5.97	5.77	5.70	5.67	5.34	4.93	4.80	4.73	4.72	4.09	3.89	3.80	4.09	3.26	2.99	2.87
3	10.09	9.66	9.35	9.24	9.19	9.24	8.60	8.39	8.30	8.81	7.85	7.54	7.40	8.38	7.10	6.69	6.50
4	13.71	13.49	13.05	12.91	12.85	13.27	12.40	12.12	11.98	13.05	11.74	11.32	11.12	12.83	11.09	10.52	10.26
5	17.48	17.48	16.92	16.74	16.65	17.48	16.36	16 —	15.83	17.48	15.80	15.25	15 —	17.48	15.24	14.51	14.17
6	21.40	.	20.94	20.72	20.61	.	20.48	20.04	19.83	.	20.02	19.35	19.04	.	19.56	18.67	18.25
7	25.47	.	25.12	24.85	24.73	.	24.77	24.23	23.98	.	24.42	23.82	23.24	.	24.06	23 —	22.49
8	29.72	.	29.48	29.16	29.01	.	29.23	28.61	28.31	.	28.99	28.05	27.61	.	28.75	27.50	26.90
9	34.15	.	34.02	33.66	33.49	.	33.90	33.17	32.83	.	33.78	32.68	32.17	.	33.65	32.20	31.51
10	38.76	.	38.76	38.35	38.15	.	38.76	37.93	37.54	.	38.76	37.51	36.93	.	38.76	37.10	36.31
11	43.59	.	.	43.15	43.03	.	.	42.91	42.46	.	.	42.27	41.90	.	.	41.82	41.33
12	48.64	.	.	48.37	48.12	.	.	48.11	47.61	.	.	47.85	47.10	.	.	47.58	46.58
13	53.93	.	.	53.75	53.46	.	.	53.57	53 —	.	.	53.38	52.54	.	.	53.20	52.08
14	59.48	.	.	59.39	59.08	.	.	59.29	58.67	.	.	59.20	58.26	.	.	59.10	57.86
15	65.32	.	.	65.32	64.97	.	.	65.32	64.62	.	.	65.32	64.27	.	.	65.32	63.93
16	71.47	.	.	.	71.19	.	.	.	70.90	.	.	.	70.62	.	.	.	70.33
17	77.98	.	.	.	77.76	.	.	.	77.54	.	.	.	77.32	.	.	.	77.10
18	84.87	.	.	.	84.72	.	.	.	84.57	.	.	.	84.41	.	.	.	84.26
19	92.19	.	.	.	92.11	.	.	.	92.03	.	.	.	91.95	.	.	.	91.88
20	100.—	.	.	.	100.—	.	.	.	100.—	.	.	.	100.—	.	.	.	100.—

TABELLA 9.

Assicurazione mista

Riserve per 100 di capitale — Durata 20

4 %

Durata trascorsa	O^M				$O^{[M]}$			
	$x = 20$	$x = 30$	$x = 40$	$x = 50$	$x = 20$	$x = 30$	$x = 40$	$x = 50$
1	3.28	3.26	3.24	3.32	3.47	3.51	3.61	3.86
2	6.69	6.64	6.60	6.73	6.91	6.99	7.17	7.62
3	10.24	10.16	10.09	10.26	10.46	10.56	10.80	11.38
4	13.93	13.81	13.71	13.89	14.13	14.24	14.52	15.21
5	17.77	17.61	17.48	17.63	17.94	18.06	18.36	19.10
6	21.78	21.57	21.40	21.51	21.91	22.02	22.32	23.04
7	25.94	25.70	25.47	25.50	26.04	26.14	26.40	27.08
8	30.28	29.99	29.72	29.65	30.32	30.41	30.63	31.22
9	34.80	34.48	34.15	33.95	34.80	34.86	35.02	35.47
10	39.52	39.15	38.76	38.43	39.46	39.49	39.57	33.85
11	44.44	44.03	43.59	43.09	44.34	44.33	44.33	44.43
12	49.57	49.14	48.64	47.97	49.44	49.40	49.30	49.15
13	54.92	54.48	53.93	53.10	54.78	54.70	54.50	54.15
14	60.52	60.07	59.48	58.49	60.37	60.25	59.99	59.42
15	66.37	65.94	65.32	64.21	66.22	66.08	65.75	65.01
16	72.49	72.08	71.47	70.30	72.35	72.19	71.81	70.96
17	78.89	78.54	77.98	76.83	78.77	78.62	78.24	77.35
18	85.60	85.32	84.87	83.88	85.51	85.38	85.05	84.23
19	92.63	92.47	92.19	91.57	92.58	92.49	92.28	91.76
20	100.—	100.—	100.—	100.—	100.—	100.—	100.—	100.—

SULLA POSSIBILITÀ DI SOSTITUIRE, NEL CALCOLO DEL TOTALE DEI PREMI E DELLE RISERVE, AD UNA TAVOLA SELEZIONATA UNA TAVOLA AGGREGATA OPPURE UNA TAVOLA COMPATTA

G. Bodoni e P. Crosato

con introduzione di Leone Spitzer
Direttore Centrale della «Riunione Adriatica di Sicurtà»

Il Prof. Guido Castelnuovo, ordinatore di questo volume, mi aveva richiesto, per la parte riguardante la questione dell'applicabilità pratica delle tavole selezionate, specialmente in merito al calcolo delle riserve, un articolo che esponesse le vedute della mia Compagnia.

Poichè le molteplici occupazioni mi hanno impedito di redigere l'articolo, ho proposto ai miei giovani collaboratori Dott. P. Crosato e G. Bodoni lo studio teorico delle possibilità di sostituire ad una tavola selezionata una tavola aggregata di seconda specie del Vajda, sul quale argomento essi hanno compilato la seguente monografia, prendendo in considerazione anche le possibilità delle tavole compatte dello Smolensky.

Dalle conclusioni della detta monografia risulta che le tavole aggregate di seconda specie non possono sostituire, nel calcolo delle riserve, una tavola selezionata malgrado le notevoli restrizioni necessarie per l'impostazione teorica del problema, restrizioni che non possono venir accettate in pratica.

Gli autori della monografia rilevano che, naturalmente, resta aperta la via allo studio pratico per la ricerca di altri metodi approssimativi che semplifichino il calcolo delle riserve, come ad esempio ha fatto lo Smolensky con le tavole compatte.

Però allo stato attuale degli studi non si vedrebbe la possibilità di sostituire in genere al tradizionale sistema di calcolo delle *riserve con le usuali tavole aggregate un sistema di calcolo che tenga conto approssimativamente dell'effetto della selezione.*

D'altro canto l'adozione da parte della mia Compagnia di una tavola selezionata non è ritenuta opportuna perchè richiederebbe un lavoro enorme dato il numero dei territori in cui la Compagnia opera e tenuto conto che in essi sono generalmente richieste dai rispettivi uffici di sorveglianza diverse basi tecniche e finanziarie. Questo stato di cose si trova probabilmente presso gran parte degli Istituti assicuratori che lavorano da molto tempo ed in molti Paesi.

Osservo infine che le usuali tavole aggregate hanno finora soddisfatto invece a tutte le esigenze pratiche.

Trieste, 30 ottobre 1934-XIII.

L. SPITZER.

Il VAJDA (1) si pone il problema di derivare da una data tavola selezionata una tavola aggregata tale, che la valutazione di una certa espressione tecnico-assicurativa, relativa ad un ben determinato complesso di persone — per le quali le eliminazioni per morte siano date dalla mortalità della tavola selezionata —, risulti eguale con entrambe le tavole. Egli ha poi studiato tale problema principalmente nel caso particolare in cui si voglia che con le due tavole risulti eguale la valutazione del totale dei premi da richiedersi a tutto il dato complesso di persone.

Nel porre a base, per la derivazione delle tavole aggregate che egli vuole determinare, la condizione che debbano risultare eguali con la data tavola selezionata e con la tavola da questa derivata le valutazioni del totale dei premi da richiedersi ad un ben determinato gruppo di persone, egli volle raggiungere l'equivalenza delle due tavole nella valutazione totale delle prestazioni previste per tutta la durata delle assicurazioni da stipulare con ognuna delle persone del complesso considerato, senza però preoccuparsi di raggiungere tale equivalenza nella valutazione delle prestazioni alla fine di ogni anno d'assicurazione. In altri termini, pur raggiungendo l'equivalenza della tavola selezionata e della tavola aggregata da essa derivata, nella valutazione del totale dei premi relativi a tutto il complesso conside-

(1) *Sulle tavole selezionate e tavole aggregate da esse derivate*, in « Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari », Roma, Anno IV, N. 1 (gennaio 1933-XI), pag. 44 e segg., e *Ueber Selekttafeln und Aggregattafeln*, in « Atti del X Congresso Internazionale degli Attuari », Roma, 1934-XII, vol. II, pag. 97.

rato, egli non si preoccupa di ottenere anche l'equivalenza delle due tavole nella valutazione dei totali delle riserve relative ad ogni singolo anno d'assicurazione.

Il soddisfacimento di tale condizione di equivalenza nella valutazione del totale dei premi è però condizione necessaria per ottenere l'equivalenza pure nel calcolo dei totali delle riserve relative ad ogni singolo anno di assicurazione, per un determinato gruppo di assicurati, la quale ultima equivalenza può essere ricercata con il desiderio di rendere possibile il calcolo, a mezzo di procedimenti tecnici più semplici di quelli che sono imposti da una tavola selezionata. La semplicità nei calcoli dei totali delle riserve è poi praticamente molto apprezzabile anche se per ciascuno degli assicurandi si ottiene con la tavola derivata, dalla data tavola selezionata, una riserva anche di non poco diversa da quella relativa alla tavola selezionata, perchè nel loro totale, relativo a tutto il complesso considerato, tali differenze trovano la loro reciproca compensazione.

Allorchè però si vuole introdurre, in luogo di una tavola selezionata, una tavola da essa derivata, con lo scopo precipuo di ottenere per i soli premi l'equivalenza nel loro totale, non si è raggiunto alcun risultato praticamente apprezzabile. Infatti. mentre le compagnie d'assicurazioni, nell'applicare per il calcolo dei premi le solite tavole aggregate, sogliono considerare i premi da esse risultanti come valori approssimati dei premi della tavola selezionata — e ciò generalmente sulla base del ragionamento che con le tavole aggregate si sopravaluta nei primi anni d'assicurazione il rischio di morte e che quindi in pratica tale sopravalutazione può essere considerata come un caricamento prudenziale per gli scarti di mortalità — tale argomentazione non ha invece valore per i premi calcolati con le tavole che il VAJDA deriva, perchè nulla si può dire a priori in merito all'approssimazione che si ottiene rispetto ad ognuno dei premi calcolati con la tavola selezionata.

Gli autori si propongono perciò non solo di esporre dapprima le vedute del VAJDA ed i risultati da lui conseguiti, nonchè di precisare alcuni altri risultati, ma anche di analizzare le possibilità delle tavole del VAJDA, come pure delle tavole compatte dello SMOLENSKI (1), relativamente all'equivalenza, rispetto alla tavola selezionata, nella valutazione dei totali delle riserve alla fine d'ogni anno d'assicurazione.

Tavole aggregate di I e II specie.

Dal punto di vista matematico, il VAJDA formula il suo problema nel seguente modo più generale: determinare i saggi di mortalità q_y di una tavola aggregata, come funzioni del tipo:

$$q_y = f\left(q_{[x']}, q_{[x']+1}, \ldots, q_{[x'+1]}, q_{[x'+1]+1}, \ldots\right)$$

dei saggi di mortalità della data tavola selezionata — denotando x' l'età più bassa della tavola selezionata stessa —, in modo che la valutazione numerica di una data espressione tecnico-assicurativa — relativamente ad un dato complesso di persone — risulti eguale con le due tavole.

Si osservi anzitutto che la forma della funzione f dipenderà generalmente dalla scelta dell'espressione tecnico-assicurativa da valutare e dal complesso delle persone che si considera.

Il VAJDA scelse, come fu detto, quale espressione tecnico-assicurativa da valutare ugualmente con le due tavole, il totale dei premi. Egli però considerò due diverse specie di complessi di persone, ottenendo così due diversi tipi di tavole aggregate.

Interpretando i procedimenti del VAJDA, definiremo complesso di prima specie, ogni insieme di gruppi di persone — che possono essere degli assicurati o più generalmente degli « osservati » in una statistica — esistenti in diverse epoche t e che sono entrate in osservazione in una qualsiasi epoca k antecedente. Nella pratica assicurativa si potrà dire che l'insieme di assicurati viventi e rappresentati dalle loro assicurazioni esistenti in diverse epoche t nel portafoglio d'una compagnia, costituisce quindi un complesso di prima specie.

(1) *Tavole compatte di mortalità*, in « Atti del II Congresso Nazionale di Scienza delle Assicurazioni », Trieste, 1932, volume III, pag. 236 e *Sulle tavole compatte di mortalità*, in « Atti del Decimo Congresso Internazionale degli Attuari », Roma, 1934-XII, vol. II, pag. 235.

Suddividiamo dapprima ogni complesso di prima specie in gruppi, ponendo nel medesimo gruppo tutte quelle persone che in *una* delle epoche t di osservazione, hanno raggiunta la medesima età y, considerando quindi come persone diverse anche lo stesso osservato che, in epoche t successive, raggiunge naturalmente successive età y. Suddividiamo poi ognuno di tali gruppi in sottogruppi, considerando appartenenti al medesimo sottogruppo tutte quelle persone che sono entrate in osservazione con la medesima età x e quindi anche alla medesima epoca k, poichè evidentemente:

$$k = t - y + x.$$

Chiamiamo poi con:

$$G^t_{x,y}$$

il numero delle persone, appartenenti ad un medesimo sottogruppo, che all'epoca t hanno raggiunta l'età y e che sono entrate in osservazione con la stessa età x. Il numero delle persone che compongono tutto il complesso di I specie sarà quindi dato dalla tripla sommatoria

$$\sum_t \sum_y \sum_x G^t_{x,y} \cdot$$

Si definisce complesso di II specie ogni insieme di persone sopravviventi, esclusa ogni eliminazione per cause differenti dalla morte, a tutte le successive età y, che provengono da gruppi di persone entrate in osservazione in diverse epoche k, nel quale insieme deve però essere considerato come persone diverse anche il medesimo osservato che raggiunge, in successive epoche t, successive età y.

Si suddivide dapprima il considerato complesso di II specie in gruppi, ponendo nel medesimo gruppo tutte le persone entrate in osservazione alla medesima epoca k e con la stessa età x. Successivamente si suddivide ognuno di tali gruppi in sottogruppi, considerando come appartenenti al medesimo sottogruppo quelle persone del gruppo considerato che sopravvivono ad una stessa età y. Chiamiamo con

$$L^k_{x,y}$$

il numero degli appartenenti al medesimo sottogruppo formato dalle persone entrate in osservazione in una stessa epoca k con la medesima età x e che hanno raggiunta alla stessa epoca

$$t = k + y - x$$

la medesima età y. Il numero delle persone che formano tutto un complesso di II specie è quindi rappresentato da una tripla sommatoria del tipo:

$$\sum_k \sum_x \sum_y L^k_{x,y}.$$

Nella pratica assicurativa il complesso degli assicurati sopravviventi in ogni singolo anno — considerando come diversi appartenenti al complesso anche le medesime persone che sopravvivono a diverse età — rappresentati da contratti appartenenti ad una o ad un dato numero di produzioni annue, rappresenta un complesso di II specie.

Si osserva a questo punto che in un medesimo materiale d'osservazione, nel quale le eliminazioni non siano avvenute che per morte, ed intercorrendo la relazione

$$t - k = y - x$$

è

$$G_{x,y} = L^k_{x,y}$$

e che perciò il complesso di persone rappresentato dal detto materiale può essere considerato indifferentemente di I o di II specie:

$$\sum_t \sum_y \sum_x G^t_{x,y} = \sum_k \sum_x \sum_y L^k_{x,y}.$$

Nel caso particolare che si ricerchi l'equivalenza del totale dei premi monoannuali di rischio, nel caso di complessi di prima specie, le q_y delle tavole aggregate, per ogni valore di y, devono soddisfare alla equazione:

$$\sum_t \sum_y \sum_x G^t_{x,y}\, q_{[x]+y-x}\, v^t = \sum_t \sum_y \sum_x G^t_{x,y}\, q_y\, v^t \qquad (1)$$

e nel caso di complessi di II specie, alla equazione:

$$\sum_k \sum_x \sum_y L^k_{x,y}\, q_{[x]+y-x}\, v^{k+y-x} = \sum_k \sum_x \sum_y L^k_{x,y}\, q_y\, v^{k+y-x} \qquad (2)$$

La determinazione delle incognite q_y a mezzo di queste equazioni rappresenterebbe dunque una soluzione del problema postosi dal VAJDA; egli però non risolve il problema nella sua generalità, ma lo limita a dei casi particolari, sia considerando particolari complessi, come pure ricorrendo a restrizioni che semplificano le due equazioni.

Egli suppone dapprima che i complessi di I specie siano formati da persone osservate in una sola epoca t, oppure che le $G^t_{x,y}$ siano indipendenti da t. Con ciò egli suppone: o di limitare la validità della soluzione che ottiene ad un complesso particolare, osservato in una sola epoca t, oppure — il che corrisponde a supporre le $G^t_{x,y}$ indipendenti da t —, che la composizione — per le età x e y — delle parti del complesso di I specie relative ad ogni t, non varino al variare dell'epoca t in cui si fa l'osservazione.

L'interpretazione assicurativa di quest'ultima restrizione consisterebbe nell'ammettere che la composizione per età raggiunta e d'entrata dei componenti un portafoglio non vari con il tempo.

Per i complessi di seconda specie egli suppone o che sia unica l'epoca k in cui entrano in osservazione le persone in essi considerate, oppure che le $L^k_{x,y}$ siano indipendenti da k. Ciò significherebbe nella pratica assicurativa: o che nei complessi di seconda specie si vogliono considerare solamente gli assicurati sopravviventi ad ogni età e rappresentati da contratti tutti appartenenti ad una sola produzione annua, oppure che la composizione per età degli assicurati rappresentati da contratti d'ogni produzione annua, resti costante per ogni anno di produzione.

Le prime due interpretazioni della costanza di t e k restringono troppo il campo di applicazione d'ogni possibile risultato, mentre le seconde interpretazioni rappresentano una vera e propria arbitrarietà, chè in pratica le ipotesi sopra accennate non restano verificate che molto grossolanamente.

Poichè dunque, nelle particolari condizioni poste dal VAJDA, si devono considerare $G^t_{x,y}$ e $L^k_{x,y}$ come indipendenti da t e rispettivamente k, tali simboli si possono scrivere senza gli indici t e k e le equazioni (1) e (2) si semplificano rispettivamente nella:

$$\sum_y \sum_x G_{x,y}\, q_{[x]+y-x} = \sum_y \sum_x G_{x,y}\, q_y \tag{3}$$

e nella

$$\sum_x \sum_y L_{x,y}\, q_{[x]+y-x}\, v^{y-x} = \sum_x \sum_y L_{x,y}\, q_y\, v^{y-x}. \tag{4}$$

Il VAJDA osserva ora che le relazioni (3) e (4) restano soddisfatte se, per ogni età raggiunta y, si soddisfano le relazioni:

$$\sum_x G_{x,y}\, q_{[x]+y-x} = q_y \,.\, \sum_x G_{x,y} \tag{5}$$

$$\sum_x L_{x,y}\, q_{[x]+y-x}\, v^{y-x} = q_y \sum_x L_{x,y}\, v^{y-x} \tag{6}$$

e definisce quindi i q_y quali soluzioni di queste ultime.

Rileviamo ora il significato di tale artificio adottato dal VAJDA per semplificare le (3) e (4) rispettivamente nelle (5) e (6). Dalle (5) e (6) si vede subito che egli vuole esprimere ogni q_y a mezzo d'una media ponderata dei $q_{[x]+y-x}$ e cioè dei tassi di mortalità della tavola selezionata che corrispondono sempre alla medesima età raggiunta y, nelle quali medie entrano come pesi i $G_{x,y}$ ed i $L_{x,y}$, per cui l'artificio fatto dal VAJDA anzitutto significa che i saggi di mortalità della tavola aggregata si vogliono far dipendere dai saggi $q_{[x]+y-x}$ della tavola selezionata che corrispondono alla età raggiunta y ed alle età d'entrata antecedenti. I saggi di mortalità q_y definiti dalla (6) risultano poi implicitamente dipendenti anche dai saggi di mortalità $q_{[x]+\bar{y}-x}$ corrispondenti a tutte le età raggiunte $\bar{y}$ inferiori a y, inquantochè i valori $L_{x,y}$ rappresentano i sopravviventi all'età y, esclusa qualsiasi altra causa di eliminazione che non sia la mortalità.

Dalle due ultime relazioni egli ricava poi, corrispondentemente ai due complessi considerati di persone, le due seguenti espressioni dei q_y delle tavole aggregate:

$$q_y = \frac{\sum_x G_{x,y}\, q_{[x]+x-y}}{\sum_x G_{x,y}} \tag{7}$$

$$q_y = \frac{\sum\limits_x L_{x,y}\, q_{[x]+y-x}\, v^{y-x}}{\sum\limits_x L_{x,y}\, v^{y-x}}. \tag{8}$$

Il VAJDA chiama « *Tavole aggregate di prima specie* » quelle i cui q_y sono dati dalla relazione (7) e « *Tavole aggregate di seconda specie* » quelle i cui q_y si possano ottenere con la relazione (8).

Osserviamo che se i

$$G_{x,y}$$

rappresentano gli osservati del materiale sulla base del quale fu calcolata la tavola selezionata, la sommatoria

$$\sum_x G_{x,y}\; q_{[x]+y-x}$$

rappresenta il numero dei morti osservati, fra le età y e $y+1$, e se ne conclude che in tal caso la tavola aggregata di I specie è la solita tavola aggregata che si può ricavare, con i soliti sistemi, dal materiale d'osservazione della tavola selezionata.

Nella pratica assicurativa le tavole di I specie, allo scopo prefissosi dal VAJDA, non hanno in genere alcun valore, poichè non avviene mai che si vogliano stipulare assicurazioni sulla testa di persone esistenti ad una determinata epoca in un complesso ben definito e che abbiano subìta *precedentemente* la relativa selezione medica, in modo che esse si possano considerare sotto osservazione già da epoche precedenti.

Meglio corrispondono invece, nel senso del VAJDA, alle necessità della pratica assicurativa le tavole aggregate di seconda specie, per le quali vengono in considerazione i gruppi di seconda specie che — come si disse — possono essere costituiti in pratica dal complesso di tutti gli assicurati di una data produzione annua, alla quale si può effettivamente applicare – da quel momento in poi — la tavola selezionata che si vuole adottare per la commisurazione della relativa mortalità.

Sembra che il VAJDA per primo abbia preso in particolare considerazione tali tavole aggregate di seconda specie e ne abbia studiato le caratteristiche che ci proponiamo di illustrare.

Anzitutto osserviamo che nelle tavole aggregate di seconda specie, come si rileva dalla (8), accanto all'ipotesi di mortalità (saggi $q_{[x]+y-x}$ della tavola selezionata) ed alle ipotesi finanziarie (saggio tecnico d'interesse) si deve fare una ulteriore ipotesi e precisamente quella della distribuzione per età degli assicurati rappresentati dai contratti appartenenti ad una medesima produzione annua. Inoltre si osservi che, sempre come si rileva dalla (8), per ogni saggio tecnico d'interesse è necessario calcolare una diversa tavola aggregata di seconda specie.

Interpretando ora l'espressione (6), che ha dato luogo alla (8) — la quale definisce i saggi di mortalità della tavola aggregata di seconda specie sulla base del concetto dell'equivalente valutazione di un totale di premi —, si può rilevare che tale equivalenza fu in sostanza ottenuta separatamente per ogni y fra il totale dei premi calcolati con le due tavole, che devono versare tutti gli assicurati $L_{x,y}$ che hanno raggiunta la medesima età y, per garantire il loro rischio di morte fra le età y e $y+1$, premi pagabili all'epoca t in cui compiono l'età y, ma scontati all'epoca k in cui tutti gli $L_{x,y}$ sono entrati in assicurazione. Tale equivalenza fra la valutazione del totale dei premi fu dunque raggiunta, in particolare, nell'ipotesi che gli appartenenti al complesso considerato stipulino assicurazioni di rischio monoannuale per assicurare per ciascuno di essi una somma unitaria, pagabile in caso di morte fra una data età y e $y+1$, verso corresponsione, se in vita al raggiungimento dell'età y, di un premio pagabile appunto a tale momento in cui deve cominciare la copertura del rischio.

Dato che le eliminazioni degli assicurati, facenti parte della produzione che forma il complesso di seconda specie considerato, non avvengono per cause diverse dalla mortalità rappresentata dai $q_{[x]+y-x}$ della tavola selezionata, si ha che:

$$L_{x,y+1} = L_{x,y}\,(1 - q_{[x]+y-x})$$

ed in generale che:

$$L_{x,y} = L_{x,x}\,(1 - q_{[x]+1})\,(1 - q_{[x]+2}) \dots (1 - q_{[x]+y-1-x})$$

cioè che:

$$L_{x,y} = \frac{l_{[x]+y-x}}{l_{[x]}} L_{x,x}.$$

La (6) si può dunque, in tal caso scrivere:

$$\sum_x L_{x,x} \frac{l_{[x]+y-x}}{l_{[x]}} q_{[x]+y-x}\, v^{y-x} = \sum_x L_{x,x} \frac{l_{[x]+y-x}}{l_{[x]}} q_y\, v^{y-x}. \qquad (9)$$

A questo punto il VAJDA dimostra che, nel secondo membro, al posto del rapporto $\frac{l_{[x]+y-x}}{l_{[x]}}$, rappresentante l'effetto della mortalità della tavola selezionata nel gruppo $L_{x,x}$ fra le età x ed y si può sostituire il rapporto $\frac{l_y}{l_x}$ rappresentante l'effetto della mortalità della tavola aggregata nel medesimo gruppo e per lo stesso periodo di tempo.

Egli arriva alla

$$\sum_x L_{x,x} \frac{l_{[x]+y-x}}{l_{[x]}} v^{y-x} = \sum_x L_{x,x} \frac{l_y}{l_x} v^{y-x} \qquad (10)$$

che si può giustificare col principio di induzione completa, e dal confronto della (9) con la (10) ha che:

$$\sum_x L_{x,x} \frac{l_{[x]+y-x}}{l_{[x]}} q_{[x]+y-x}\, v^{y-x} = \sum_x L_{x,x} \frac{l_y}{l_x} q_y\, v^{y-x} \qquad (11)$$

la quale significa che l'equivalenza fra la tavola selezionata e l'aggregata di seconda specie da esse derivata è così raggiunta anche nel particolare caso in cui si pensino gli appartenenti al complesso considerato, assicurati per il caso di morte fra l'età y e l'eta $y+1$, con versamento di un premio monoannuale pagabile però all'epoca k in cui tutti entrano in osservazione. Evidentemente poi l'equivalenza è così raggiunta anche per ogni assicurazione temporanea a premio unico pagabile al momento k, in cui tutti i partecipanti al complesso considerato entrano in assicurazione, che garantisce il capitale unitario per il caso di morte che avvenga prima di una età y uniforme per tutti gli assicurati. Come caso particolare si potrà dunque dire che l'equivalenza è raggiunta per le assicurazioni per il caso di morte a vita intera ($y = \omega$).

La (10) poi significa che l'equivalenza delle due tavole nella valutazione del totale dei premi è pure raggiunta per le assicurazioni che garantiscono, a premio unico, il capitale unitario per il caso di sopravvivenza ad una data età y uniforme per tutti gli assicurati.

Ne consegue infine che tale equivalenza sussiste pure per le assicurazioni miste con raggiungimento uniforme.

Il controllo formale, per altra via, di quest'ultima affermazione, che riassume in sè le due precedenti. è immediato. Infatti dalla (10) discende immediatamente la

$$\sum_x L_{x,x} \sum_{\overline{y}=x}^{\overline{y}=y-1} \frac{l_{[x]+\overline{y}-x}}{l_{[x]}} v^{\overline{y}-x} = \sum_x L_{x,x} \sum_{\overline{y}=x}^{\overline{x}=y-1} \frac{l_{\overline{y}}}{l_x} v^{\overline{y}-x}$$

cioè la

$$\sum_x L_{x,x} \mathrm{a}_{[x],\overline{y-x|}} = \sum_x L_{x,x} \mathrm{a}_{x,\overline{y-x|}} \tag{12}$$

e quindi anche la

$$\sum_x L_{x,x}[1 - d\,\mathrm{a}_{[x],\overline{y-x|}}] = \sum_x L_{x,x} 1 - d\,\mathrm{a}_{x,\overline{y-x|}}]$$

che, come si sa, si può scrivere:

$$\sum_x L_{x,x} A_{[x],\overline{y-x|}} = \sum_x L_{x,x} A_{x,\overline{y-x|}} \tag{13}$$

ove con $A_{[x],\overline{y-x|}}$ ed $A_{x,\overline{y-x|}}$ si indicano i premi unici — calcolati rispettivamente il primo con la tavola selezionata ed il secondo con la tavola aggregata — pagabili all'inizio dell'assicurazione e necessari per garantire in forma mista il capitale unitario fino al raggiungimento dell'età y.

Resta così dimostrato che con le tavole aggregate di seconda specie si raggiunge, per il totale dei premi unici delle assicurazioni morte, vita e miste con raggiungimento uniforme per tutti gli assicurati (quindi anche per le assicurazioni a vita intera), la equivalenza di valutazione con le corrispondenti tavole selezionate ed aggregate.

Il VAJDA osserva poi che qualora si volesse ottenere la equivalenza in questione per le assicurazioni in caso di morte e miste con una durata n, eguale per tutti gli appartenenti al dato complesso di seconda specie, si potrebbe costruire una tavola aggregata di seconda specie derivata dalla data tavola selezionata, nella quale però, per ogni x, sia stato posto rispettivamente

$q_{[x]+n-1+i} = 0\,;\quad (i = 1, 2, \ldots)$ per le assicurazioni in caso di morte,

$q_{[x]+n-1} = 1$ per le assicurazioni miste.

In tal modo però si dovrebbero calcolare non solo per le assicurazioni morte e le assicurazioni miste diverse tavole aggregate di seconda specie, ma occorrerebbero tavole di seconda specie diverse anche per ogni singola durata n di assicurazione.

Invece l'equivalenza nel totale dei premi annui dell'assicurazione mista generalmente non si raggiunge. Infatti, dall'equivalenza del totale dei valori attuali — calcolati a mezzo della tavola selezionata — dei premi relativi alle due tavole, cioè dall'eguaglianza

$$\sum_x L_{x,x}\, P_{[x],\overline{y-x}|}\, a_{[x],\overline{y-x}|} = \sum_x L_{x,x}\, P_{x,\overline{y-x}|}\, a_{[x],\overline{y-x}|}$$

si ricaverebbe facilmente che:

$$\sum_x L_{x,x}\, \frac{a_{[x],\overline{y-x}|}}{a_{x,\overline{y-x}|}} = \sum_x L_{x,x}$$

eguaglianza quest'ultima che invece, mediante una prova (nel caso speciale di $y = \omega$) il VAJDA ha dimostrato non sussistere sempre.

Resta dunque dimostrato che le tavole aggregate di seconda specie consentono di raggiungere — pel solo caso di morte e per la forma mista — l'equivalenza, rispetto alla tavola selezionata, dell'incasso totale dei premi per ogni complesso di assicurandi entrati in assicurazione tutti contemporaneamente, quando i contratti siano stati stipulati a premio unico. Se tutte le assicurazioni vengono conchiuse con la medesima età di raggiungimento (oppure se in corrispondenza ad ogni età di raggiungimento si ha la stessa distribuzione per età nella produzione) e qualora si ammetta che per tutte e tre le forme assicurative fondamentali — per il caso di morte, di vita e miste — sia eguale la distribuzione per età degli assicurandi nella produzione, è unica la tavola aggregata di seconda specie che procura tale equivalenza per il totale dei premi unici. Qualora invece non siano soddisfatte le condizioni suddette, è necessario costruire per ogni singola durata e forma assicurativa — morte e mista — una particolare tavola aggregata di seconda specie onde ottenere l'equivalenza in questione.

Per le assicurazioni a premio annuo il VAJDA ha poi dimostrato con l'esempio sopra accennato che generalmente non è soddisfatta l'equivalenza delle due tavole nel calcolo dei valori attuali dei premi annui, calcolati rispettivamente con la tavola selezionata ed aggregata.

La tavola aggregata di II specie in relazione alle riserve.

Interessa ora di studiare, almeno nei soli casi in cui le tavole aggregate di II specie assicurano l'equivalenza nella valutazione del totale dei premi, il loro comportamento rispetto alla valutazione dei totali delle riserve relative ad ogni singola esistenza in vigore dei contratti.

Anche nel solo caso di assicurazioni a premio unico, in cui le tavole di II specie danno l'equivalenza nella valutazione del totale dei premi, non è però raggiunta l'equivalenza nella valutazione dei totali delle riserve relative ad ogni singola esistenza in vigore dei contratti.

Per dimostrare quest'ultima affermazione, osserviamo anzitutto che per definizione i q_y della tavola aggregata di II specie sono una media — fatta con i pesi $L_{x,y}\, v^{y-x}$, tutti positivi — dei valori $q_{[x]+y-x}$ che, all'aumentare di x diminuiscono. Sarà quindi in genere:

$$q_y > q_{[y]+0}$$

fatta eccezione per la sola età x_0 più giovane che compare nella distribuzione per età della produzione, per la quale è sempre — come si vede facilmente — $q_{x_0} = q_{[x_0]+0}$. Ora, dopo un anno, per esempio, di esistenza in vigore dei contratti a premio unico, il complesso delle riserve — nell'ipotesi di aver pagati solamente i sinistri morte e non ancora le prestazioni pel caso di vita all'inizio dell'anno successivo — calcolato con la tavola selezionata è dato dalla relazione:

$$r \sum_{x=x_0}^{x=y-1} L_{x,x}\, A_{[x],\overline{y-x|}} - \sum_{x=x_0}^{x=y-1} L_{x,x}\, q_{[x]+0}$$

che si ottiene osservando che alla fine del primo anno d'assicurazione si dispone del totale dei premi con gli interessi tecnici, meno quanto si è dovuto pagare per i decessi.

L'analoga espressione delle riserve, calcolate dopo un anno col metodo retrospettivo e con la tavola aggregata, sarà:

$$r \sum_{x=x_0}^{x=y-1} L_{x,x}\, A_{x,\overline{y-x|}} - \sum_{x=x_0}^{x=y-1} L_{x,x}\, q_x \,.$$

I primi termini delle due espressioni sono bensì eguali, ma non lo possono essere invece i secondi termini, poichè — come si è dianzi osservato — è generalmente $q_{[\xi]+0} < q_\xi$ per tutte le età ξ, all'infuori di x_0.

Già dopo un anno d'esistenza in vigore dei contratti, il totale delle riserve non è dunque ugualmente valutato dalle due tavole, ma è anzi sottovalutato dalla tavola aggregata di II specie, ciò che costituisce una nuova manchevolezza per l'applicazione pratica delle tavole aggregate, anche nel caso che si tratti di assicurazioni a premio unico, in cui si ottiene l'equivalente nella valutazione del totale dei premi unici.

Le tavole compatte nella soluzione del problema del Vajda.

Gli artifici introdotti dal Vajda per l'impostazione delle tavole aggregate di I e II specie sono stati quelli di assumere come valori dei q_y delle tavole aggregate delle medie fra i valori $q_{[x]+y-x}$ della tavola selezionata, medie fatte rispettivamente con i pesi $G_{x,y}$ ed $L_{x,y}\, v^{y-x}$. Poichè tali soluzioni rappresentano, di fronte al problema più generale postosi dal Vajda, due soluzioni già molto particolari, è forse opportuno di studiare, dal detto punto di vista del computo dei totali delle riserve, anche le tavole compatte dello SMOLENSKI, che da ogni tavola selezionata si possono derivare nell'ipotesi della distribuzione per età d'una determinata produzione, a mezzo di medie ponderate con i pesi $L_{x,x+h}$ dai valori $q_{[x]+h}$ della tavola selezionata.

Supposta nota quindi la distribuzione per età di un complesso d'assicurati, rappresentati da polizze provenienti tutte da una medesima produzione annua, i valori q_h delle probabilità di morte di una tavola compatta, dipendenti dalla sola esistenza in vigore dei contratti, si definiscono a mezzo della media:

$$q_h = \frac{\sum\limits_x L_{x,x+h}\, q_{[x]+h}}{\sum\limits_x L_{x,x+h}}. \tag{14}$$

In tal modo il q_h viene così ad essere indipendente dalla età d'entrata x, ma dipendente esclusivamente dalla predurata h del contratto.

Dalla suindicata definizione dei q_h, escludendo ogni causa di eliminazione differente dalla morte, facilmente si deriva, con il principio della induzione completa, l'uguaglianza:

$$\sum_x L_{x,x} \frac{l_{[x]+h}}{l_{[x]}} = \sum_x L_{x,x} \frac{l_h}{l_o} \tag{15}$$

ove l_o è una costante arbitraria.

Da questa si ricava immediatamente la relazione:

$$\begin{aligned} &\sum_x L_{x,x} \sum_{h=o}^{h=n-1} v^{h+1} \left[\frac{l_{[x]+h} - l_{[x]+h+1}}{l_{[x]}} C_h + \frac{l_{[x]+h+1}}{l_{[x]}} T_h \right] = \\ &= \sum_x L_{x,x} \sum_{h=o}^{h=n-1} v^{h+1} \left[\frac{l_h - l_{h+1}}{l_o} C_h + \frac{l_{h+1}}{l_o} T_h \right] \end{aligned} \tag{16}$$

che esprime l'eguaglianza fra il totale dei premi unici necessari per assicurare in ogni h^{mo} anno di assicurazione, pel caso di morte il capitale C_h e per il caso di vita alla fine dell'anno stesso l'importo T_h, assicurazione questa che si può considerare della forma più generale.

Ponendo, per esempio, in essa:

$$C_h = 1 \qquad \text{per } h = 0, 1, 2, \ldots\ldots\ldots, n-1$$

$$T_h = \begin{cases} 0 & \text{per } h = 0, 1, 2, \ldots\ldots\ldots, n-2 \\ 1 & \text{per } h = n-1 \end{cases}$$

si ottiene la relazione di equivalenza, nella valutazione totale dei premi unici di una assicurazione mista:

$$\sum_x L_{x,x} A_{[x],\overline{n}|} = \sum_x L_{x,x} A_{o,\overline{n}|}$$

nella quale con $A_{o,\overline{n}|}$ si vuole rappresentare precisamente il premio unico dell'assicurazione mista con durata n, calcolato con la tavola compatta e pagabile all'inizio dell'assicurazione (all'esistenza in vigore «zero»).

Se si osserva ora che dalla (15) segue:

$$\sum_x L_{x,x}\, \mathrm{a}_{[x],\overline{n}|} = \sum_x L_{x,x}\, \mathrm{a}_{o,\overline{n}|} \tag{17}$$

ove $\mathrm{a}_{o,\overline{n}|}$ indica il valore, all'inizio dell'assicurazione, di una rendita costante ed unitaria, calcolata con la tavola compatta, e nell'ipotesi di prescrivere per la suindicata assicurazione più generale il pagamento di premi annui costanti, che rispettivamente, a mezzo delle due tavole, si dovranno calcolare con le formule:

$$\sum_{h=o}^{h=n-1} v^{h+1} \left[\frac{l_{[x]+h} - l_{[x]+h+1}}{l_{[x]}} C_h + \frac{l_{[x]+h+1}}{l_{[x]}} T_h\right] =$$

$$= P_{[x],\overline{n}|} \sum_{h=o}^{h=n-1} v^h \frac{l_{[x]+h}}{l_{[x]}}$$

$$\sum_{h=o}^{h=n-1} v^{h+1} \left[\frac{l_h - l_{h+1}}{l_o} C_h + \frac{l_{h+1}}{l_o} T_h\right] = P_{o,\overline{n}|} \sum_{h=o}^{h=n-1} v^h \frac{l_h}{l_o}$$

si otterrà — tenuta presente la (17) — la relazione:

$$\sum_x L_{x,x} P_{[x],\overline{n}|}\, \mathrm{a}_{[x],\overline{n}|} = \sum_x L_{x,x} P_{o,\overline{n}|}\, \mathrm{a}_{[x],\overline{n}|} \tag{18}$$

la quale esprime l'uguaglianza fra il valore attuale dei premi annui calcolati con le due tavole. Prescrivendo dunque, per la più generale forma assicurativa, il pagamento dei premi annui calcolati con la tavola compatta, oppure i premi annui calcolati con la tavola selezionata, si incassa sempre lo stesso totale premi per tutto il complesso considerato.

Con le tavole compatte si risolve quindi in pieno il problema postosi dal VAJDA in relazione ai premi.

Dalla relazione

$$\sum_x L_{x,\,x+k} \frac{l_{[x]+h}}{l_{[x]+k}} = \sum_x L_{x,\,x+k} \frac{l_h}{l_k} \tag{19}$$

che facilmente si può dimostrare — sempre con il principio dell'induzione completa —, si ha:

$$\begin{aligned} \sum_x L_{x,\,x+k} \sum_{h=k}^{h=n-1} v^{h-k+1} \left[\frac{l_{[x]+h} - l_{[x]+h+1}}{l_{[x]+k}} C_h + \frac{l_{[x]+h+1}}{l_{[x]+k}} T_h \right] &= \\ = \sum_x L_{x,\,x+k} \sum_{h=k}^{h=n-1} v^{h-k+1} \left[\frac{l_h - l_{h+1}}{l_k} C_h + \frac{l_{h+1}}{l_k} T_h \right] & \end{aligned} \tag{20}$$

relazione che esprime l'equivalenza fra il totale delle riserve valutate con la tavola selezionata e la tavola compatta alla fine del k^{mo} anno, per le anzidette assicurazioni più generali, qualora queste siano stipulate a premio unico.

Per le assicurazioni a premio annuo però tale equivalenza non sussiste in generale. Difatti a tal uopo sarebbe evidentemente necessario che fosse verificata la relazione:

$$\sum_x L_{x,\,x+k} \frac{a_{[x]+k,\,\overline{n-k|}}}{a_{[x],\,\overline{n|}}} = \sum_x L_{x,\,x+k} \frac{a_{k,\,\overline{n-k|}}}{a_{o,\,\overline{n|}}}$$

che invece, a mezzo di una prova, si può dimostrare non sempre sussistente.

Anche con le tavole compatte quindi non resta verificata, per le assicurazioni a premio annuo, la cercata equivalenza fra le riserve.

A tale proposito si può invece rilevare che dalla (19) segue subito la uguaglianza:

$$\sum_x L_{x,\,x+k}\, a_{[x]+k,\,\overline{n-k|}} = \sum_x L_{x,x+k}\, a_{k,\,\overline{n-k|}}$$

dalla quale si può derivare pure la relazione:

$$\sum_x L_{x,x+k}\left[A_{[x]+k,\overline{n-k|}} - P_{o,\overline{n|}}\, a_{[x]+k,\overline{n-k|}}\right] = \\ = \sum_x L_{x,x+k}\left[A_{k,\overline{n-k|}} - P_{o,\overline{n|}}\, a_{k,\overline{n-k|}}\right] \qquad (21)$$

che esprime l'equivalenza fra i totali delle riserve calcolate, sempre sulla base dei premi netti della tavola compatta, ma dapprima con il premio unico e la rendita della tavola selezionata e poi con il premio unico e la rendita della tavola compatta.

Per quanto dunque rigorosamente non si raggiunga l'equivalenza nel totale delle riserve a premio annuo, agli autori non sembrerebbero però inutili le indagini pratiche dell'andamento dei valori complessivi delle riserve calcolate con le tavole compatte, nel senso che forse si potrebbero verificare accettabili nel totale del portafoglio i risultati della tavola compatta, quali valori approssimati degli analoghi valori della tavola selezionata.

L'influenza degli storni nella equivalenza della valutazione dei totali delle riserve.

I risultati illustrati in quanto precede furono ottenuti nella supposizione di non tener conto degli storni.

Vogliamo ora analizzare il comportamento della tavola compatta nella valutazione dei totali delle riserve alla fine d'ogni anno d'assicurazione, prendendo in considerazione gli storni che si verificano di anno in anno fra i sopravviventi di una data produzione, nell'ipotesi che si tratti di assicurazioni a premio unico.

Premettiamo che al momento di uscita per storno di un'assicurato, per esso viene escorporata dal totale delle riserve la relativa riserva matematica, calcolata con la tavola selezionata.

Per il computo dei premi unici iniziali, da farsi con la tavola selezionata, non teniamo conto degli storni appunto perchè per ogni assicurato uscito per storno si prevede che venga ad esso corrisposta la relativa riserva matematica del suo contratto, calcolata con la tavola selezionata stessa, e per la medesima ragione nel calcolo del complesso dei totali delle riserve di ogni singolo anno d'assicurazione, si tiene conto soltanto degli storni avvenuti negli anni precedenti a quello che si considera, e non degli storni possibili in avvenire.

Alla fine del k^{mo} anno, per effetto della mortalità e degli storni verificatisi durante i primi k anni d'assicurazione di ognuno dei gruppi $L_{x,x}$ componenti la produzione data, restino in assicurazione, soltanto $E_{x,x+k}$ assicurandi. Non dovendosi dunque tener conto degli storni relativi agli anni avvenire, si comprende che i totali delle riserve devono venir calcolati per tutte le prestazioni da corrispondere ai sopravviventi dei gruppi $E_{x,x+k}$, i quali, d'anno in anno, saranno:

$$E_{x,x+k}\frac{l_{[x]+k+1}}{l_{[x]+k}}; \qquad E_{x,x+k}\frac{l_{[x]+k+2}}{l_{[x]+k}}; \qquad \ldots\ldots$$

Per ottenere poi l'equivalenza fra il computo delle riserve relative a detti gruppi di sopravviventi degli $E_{x,x+k}$, si deve adottare una tavola compatta — ciò che risulta evidente dalle precedenti considerazioni svolte per tali tavole — in cui siano i q_y^k definiti dalla media:

$$q_h^k = \frac{\sum\limits_x E_{x,x+k}\frac{l_{[x]+h}}{l_{[x]+k}}q_{[x]+h}}{\sum\limits_x E_{x,x+k}\frac{l_{[x]+h}}{l_{[x]+k}}}; \qquad \text{ove } h \geqq k$$

nella quale dunque non viene tenuto conto degli storni futuri nei pesi $E_{x,x+k}\frac{l_{[x]+h}}{l_{[x]+k}}$.

Risulta evidente che il q_h^k così definito dipende dagli storni verificatisi nei primi k anni di assicurazione (ragione per cui fu munito dall'indice k) e che in generale differisce dal corrispondente q_h definito dalla (14). Pertanto si comprende come, nell'ipotesi che si voglia tener conto degli storni, per ottenere l'equivalenza nel totale delle riserve, si renda generalmente necessario alla fine di ogni anno d'esistenza in vigore dei contratti il calcolo di una nuova tavola compatta.

Solo nel caso che si possa porre:

$$E_{x,x+k} = \alpha_k L_{x,x+k}$$

cioè che si possa ammettere che in ogni anno d'esistenza in vigore la percentuale dei contratti stornati sia indipendente dall'età di entrata in assicurazione, ne consegue che, per ogni k, $q_h^k = q_h$, cioè che la tavola compatta adottata per il computo dei premi unici dà, pure nella supposizione che si tenga conto degli storni e che per ogni contratto stornato, si escorpori dal totale delle riserve quella relativa ad esso, calcolata con la tavola selezionata, l'equivalenza del totale delle riserve per il totale degli assicurati rimasti.

Conclusioni.

Da quanto risulta più sopra si conclude che, mentre in fatto d'indagine teorica le tavole compatte risolvono il problema postosi dal VAJDA relativamente ai premi unici ed annui, come pure relativamente alle riserve a premio unico, di fronte alle tavole di seconda specie che non risolvono il problema dell'equivalenza che in modo particolare dal punto di vista dei premi unici, in fatto di risultati pratici, la sostituzione della tavola selezionata con un'altra da essa desunta può forse più facilmente trovar applicazione nella questione delle riserve — ed a ciò si presta solo la tavola compatta —, poichè mentre nel problema dei premi non è in generale sufficiente ottenere la equivalenza solo rispetto al totale della produzione, non dovendo essere perduta di vista la questione dell'altezza del saggio di premio considerato isolatamente, in questione di riserve l'equivalenza nel totale di una produzione potrebbe eventualmente risultare un elemento capace di utilizzazione.

Si rileva però che con la tavola compatta si ottiene rigorosamente l'equivalenza delle riserve rispetto alla tavola selezionata solamente per i premi unici e sulla base di ipotesi semplificatrici non sempre verificate in pratica, mentre che per le riserve a premio annuo, rigorosamente non si ottiene l'equivalenza più volte citata, ma rimane soltanto l'eventuale possibilità di una valutazione approssimata da ottenersi con la tavola compatta, problema questo ultimo che in sostanza fu già oggetto di studio da parte dello SMOLENSKY.

LA SELEZIONE NELLE TAVOLE DI MORTALITÀ DI INVALIDI

RICCARDO OTTAVIANI
Direttore della « Fondiaria-Vita ».

Gli studi statistici ed attuariali hanno avuto origine e rapido sviluppo nelle loro applicazioni alle assicurazioni libere, mentre lo studio dei grandi movimenti demografici che si svolgono nelle imponenti collettività inquadrate nelle istituzioni sociali chiuse, pubbliche e private, e nelle casse pensioni e di previdenza, si è svolto con maggiore lentezza. Negli ultimi tempi, e specialmente nel nostro Paese, la massa iscritta a codeste Istituzioni forse sorpassa quella assicurata con polizze commerciali e l'andamento dei fenomeni di invalidità e di mortalità dei validi e degli invalidi già iscritti nelle Casse Pensioni, ha una ripercussione ed un effetto finanziario non minori di quelli della mortalità degli assicurati, sia che la loro importanza debba misurarsi sul numero delle persone interessate o che sia apprezzata sulla portata delle operazioni finanziarie che ne derivano; perciò, ed anche per raggiungere il grado di perfezione cui sono pervenute le indagini statistiche nel campo originario di applicazione, si nota ora una ripresa nello studio dei fenomeni di invalidità e di mortalità degli invalidi. Nonostante il vasto campo di osservazione, il nuovo orientamento dei nostri studi è però apparso in tempi troppo recenti per dar luogo ad un'esperienza analitica sufficiente alla applicazione negli studi relativi alla selezione, ed ancor oggi rare sono le statistiche raccolte in modo da rilevare la selezione nell'eliminazione degli invalidi. In questo studio vogliamo dimostrare, adoperando una delle poche esperienze che siano meritevoli di esame analitico per la loro ampiezza e per la precisione dei dati raccolti, e cioè la Statistica dei Ferrovieri vitaliziati Italiani, che nelle tavole di mortalità di invalidi (vitaliziati o no) il criterio selettivo è una necessità, non è un'opportunità come in molte tavole di mortalità generali e in tutte le tavole di mortalità di vitaliziati ordinari. Perciò siamo rimasti sorpresi che nell'ultimo Congresso degli attuari, in cui l'argomento delle tavole di selezione in generale era all'ordine del giorno, il ramo riguardante le tavole di selezione applicate ai vitalizi invalidi sia stato trattato come studio particolare esorbitante dal programma tracciato, e questo rimanesse perciò limitato alla selezione fra assicurati in caso di morte nel senso classico della parola.

Non vogliamo, in questa obiettiva raccolta di studi sull'importante argomento, istituire una discussione se fosse o no esatta, o almeno condivisa dalla generalità, la interpretazione data al tema. Di fatto questa poteva essere giustificata dalla scarsità di memorie che si occuparono della mortalità fra invalidi. Furono presentati infatti al Congresso due soli studi che riguardavano l'oggetto di cui trattiamo, dei quali uno (Lenz) aveva per scopo di ritrovare la formula per la costruzione della tavola di sopravvivenza generale e dei tassi annui di invalidità e di mortalità selezionata fra invalidi, nonchè la formula per il tasso aggregato di eliminazione degli invalidi, per mezzo del tasso di selezione.

L'altro studio (Bulina) aveva per oggetto la ripartizione del tasso di mortalità selettiva degli invalidi in due parti, mediante un coefficiente s_x di selettività; una parte relativa alla mortalità normale funzione dell'età, l'altra per la mortalità selettiva in funzione della durata t dell'invalidità:

$$q^i_{[x]+t} = s_x \, q^{is}_t + (1 - s_x) \, q^i_{x+t}$$

Il fatto si è che gli eminenti attuari che hanno trattato l'argomento in rapporto alle assicurazioni ordinarie in caso di morte o in caso di vita, pur avendo riconosciuto che le tavole selezionate sono quelle che meglio rispondono ad una tecnica razionale, tuttavia sono pervenuti ad alcune conclusioni interessanti, che hanno qualche relazione indiretta col presente studio:

1) il caricamento di selezione dei premi è contenuto nei limiti dell'approssimazione con cui si potrebbe determinare il caricamento di garanzia (ESSCHEN);

2) le conseguenze della selezione sono attenuate dalla influenza delle variazioni secolari della mortalità, per cui l'effetto selettivo viene limitato a pochi anni (ALTENBURGER);

3) non ha alcuna utilità pratica il considerare un periodo di selezione maggiore di un anno per le rendite e di 3 anni per le assicurazioni in caso di morte (ELDERTON).

Tali conclusioni non possono estendersi al calcolo delle rendite vitalizie su teste di invalidi, per le quali la selezione opera profondamente nell'aggravamento della mortalità nei primi anni, e la sua influenza non si spegne così presto come nell'autoselezione delle rendite ordinarie, o nella selezione per visita medica delle assicurazioni in caso di morte. La differenza fra i valori attuali delle rendite selezionate e aggregate di invalidità è talmente rilevante, che la scelta di una di esse è ben importante dal punto di vista industriale, oltre che come studio accademico.

Riporto nella Tabella I alcuni valori di annualità vitalizie posticipate al 4 % dei ferrovieri italiani, secondo la tavola finale, la tavola aggregata, e la tavola selezionata:

TABELLA I.

Annualità vitalizie su teste di invalidi (4 %)
(Pensionati invalidi delle Ferrovie Italiane)

Età	Periodo 1885-1902			Periodo 1905-1914
	Tavola di mortalità			Tavola aggregata
	finale	aggregata	selezionata	
30	16.721	10.852	13.601	14.065
35	15.253	11.286	12.843	12.828
40	14.116	11.454	12.034	12.341
45	12.883	11.465	11.486	12.226
50	11.567	11.134	10.828	11.545
55	10.196	10.108	9.917	10.707
60	8.805	8.921	8.778	9.401

Il DRACHMANN considera la tavola selezionata in caso di morte come differenza fra la tavola di mortalità della popolazione generale e un numero relativo B_x (< 1) di persone affette da tara fisica, e indica la probabilità di sopravvivenza selezionata dopo t anni con ${}_tp_{[x]} = (1 + B_x)\,{}_tp_x - B_x\,{}_tp^s_{[x]}$ dove ${}_tp^s_{[x]}$ è la probabilità di sopravvivenza del gruppo dei tarati. Con procedimento analogo, ma inverso, possiamo nel campo della tavola di invalidi considerare la probabilità selettiva di mortalità nei primi t anni di osservazione, come somma di una probabilità generale funzione dell'età e di una probabilità collegata alle cause di morte dipendenti dallo stato di invalidità e variabile col solo periodo di antidurata dell'invalidità.

Poichè trattasi qui di un gruppo chiuso ad ulteriori entrate, possiamo porre:

$$q_{[x-t]+t} = q_x + q^s_t$$

indicando con q_x una tavola di mortalità generale funzione della sola età raggiunta x, che nel nostro caso identifichiamo nella tavola finale di mortalità degli invalidi, cioè nella mortalità osservata dopo il periodo di selezione.

Avremo quindi per ipotesi che la collettività dei pensionati per invalidità da una determinata categoria di attività, sia composta, per ogni età a partire dalla data dell'esonero, di un gruppo di normali, cioè di pensionati la cui diminuita abilità al lavoro non è causa di maggiore probabilità di morte soltanto nei primi anni, ma costituisce una tara che ne aggrava la mortalità normale di una percentuale costante fino ad una determinata età; e di un gruppo di invalidi per i quali la mortalità è specifica e caratteristica, e derivante dalla invalidità contratta ed agente soltanto con l'anzianità di questa. Per questi ultimi l'andamento della mortalità presenta una curva che può identificarsi, anche per ragioni di omogeneità e di simmetria con la curva della mortalità di MAKEHAM in base alla quale è perequata la tavola finale, con una funzione esponenziale $\alpha\,\beta_t$, le cui costanti sono ambedue variabili, decrescenti con l'aumentare dell'età al momento dell'inabilitazione.

In tal modo ho studiato l'andamento della mortalità nei pensionati invalidi delle Ferrovie italiane direttamente nel periodo dal 1885 al 1902, i cui dati furono raccolti per età all'esonero e per anno di godimento della pensione fino al 5° anno.

La selezione si verificò effettiva fino al 4° anno di invalidità; in seguito potè confondersi con la tavola finale.

I tassi di selezione si presentano così diversi, e naturalmente così elevati nelle età più giovani e nei primi 2 o 3 anni di quiescenza, non solo in confronto dei tassi finali di mortalità, ma bensì in confronto dei tassi della mortalità d'insieme (tavola aggregata), che in questo campo non si potrebbe giustificare l'adozione di una tavola aggregata.

Limitandomi per ora al periodo 1885-1902, nella Tabella II ho riportato, per un'età ogni quinquennio, i tassi di mortalità, della tavola selezionata (*a*) e, per le età raggiunte corrispondenti, i tassi di mortalità della tavola finale (*b*); ed a fianco di ogni tasso selezionato il rispettivo coefficiente di selezione (*c*):

$$1 - \frac{q_{[x]}}{q_x}$$

La tavola finale, come ho detto, è perequata con la formula di Makeham con:

$$a = 0{,}00497$$
$$b = 0{,}000482$$
$$c = 1{,}0737$$

La Tavola selezionata $\mu_{[x-t]+t}$ è considerata composta della tavola finale suddetta e di una tavola di mortalità di invalidità per ciascuna età all'inizio della invalidità. Quest'ultima tavola, detta di extramortalità, è funzione della durata t di invalidità e della età all'entrata: ho perequato le curve della extra-mortalità selezionata, in corrispondenza a ciascuna età quinqnennale, con la funzione esponenziale di t:

$$\alpha_{[x]}\, \beta_{[x]}^{t}$$

TABELLA II.

Tassi di mortalità degli invalidi nei primi 4 anni di invalidità ed oltre il 4⁰ anno di invalidità e coefficienti di selezione

(Pensionati invalidi delle Ferrovie italiane 1885-1902)

Età	Anni di durata dell'invalidità				
	$t = 0$	1	2	3	4
30	(a) 0.10944	0.04975	0.03003	0.02756	—
	(b) 0.00903	0.00932	0.00964	0.00998	0.01035
	(c) 0.9175	0.8124	0.6785	0.6377	—
35	(a) 0.10944	0.04975	0.03003	0.02756	—
	(b) 0.01074	0.01116	0.01161	0.01210	0.01262
	(c) 0.9019	0.7787	0.6134	0.5610	—
40	(a) 0.10944	0.04852	0.02953	0.02756	—
	(b) 0.01319	0.01379	0.01444	0.01513	0.01588
	(c) 0.8795	0.7158	0.5110	0.4510	—
45	(a) 0.08540	0.04628	0.02900	0.02750	—
	(b) 0.01668	0.01754	0.01847	0.01949	0.02053
	(c) 0.8047	0.6210	0.3631	0.2913	—
50	(a) 0.06296	0.04289	0.02867	0.02688	—
	(b) 0.02167	0.02291	0.02422	0.02564	0.02715
	(c) 0.6558	0.4660	0.1552	0.0475	—
55	(a) 0.04849	0.03826	—	—	—
	(b) 0.02881	0.03054	0.03241	0.03513	0.03658
	(c) 0.4058	0.2018	—	—	—
60	(a) 0.04177	—	—	—	—
	(b) 0.03890	0.04138	0.04404	0.04689	0.04994
	(c) 0.0187	—	—	—	—
65	(a) —	—	—	—	—
	(b) 0.05321	0.05671	0.06046	0.06448	0.06863
	(c) —	—	—	—	—
70	(a) —	—	—	—	—
	(b) 0.07337	0.07665	0.08354	0.08915	0.09513
	(c) —	—	—	—	—

(a) - Tassi selezionati nei primi 4 anni di invalidità.

(b) - Tassi finali oltre il 4⁰ anno di invalidità.

(c) - Coefficienti di selezione $c = 1 - \frac{(b)}{(a)}$.

ed ho trovato i seguenti valori delle costanti:

$[x] = 35$	$\alpha = 0.0768$	$\beta = 0.5692$
40	0.0729	0.5396
45	0.0557	0.5151
50	0.0449	0.3284

Nella Tabella III è esposto il risultato di tali perequazioni parziali, che si dimostra abbastanza soddisfacente.

Sicchè la formula complessiva di perequazione della Tavola selezionata risulta

$$\mu_{[x]+t} = a + bc^x + \alpha_{[x]}\, \beta^t_{[x]}$$

La formula, lasciata nella forma originaria, sarebbe funzione di tre variabili, e non avrebbe altro scopo pratico che di permettere la distinzione nelle sue due parti $a + bc^x$ e $\alpha_{[x]}\, \beta^t_{[x]}$, la prima parte applicata a tutte le età x, la seconda a qualche età all'ingresso $[x]$. Per renderla applicabile a tutte le età all'ingresso, occorre sostituire ai valori trovati di $\alpha_{[x]}$ e $\beta_{[x]}$ una legge generale in funzione di tale età. Ho ritenuto conveniente rappresentare la variabilità delle due costanti α e β con due rette:

$$\alpha_{[x]} = A_1 + B_1\,[x]; \qquad \beta_{[x]} = A_2 + B_2\,[x];$$

ed ho trovato:

$$A_1 = \quad 0{,}1585 \qquad\qquad A_2 = \quad 1{,}1229$$
$$B_1 = -\,0{,}002298 \qquad\qquad B_2 = -\,0{,}01494.$$

In modo che la formola complessiva per la rappresentazione delle tavole selezionate dei tassi di mortalità degli invalidi, è risultata:

$$\mu_{[x]+t} = a + bc^x + (A_1 + B_1\,[x])\,(A_2 + B_2\,[x])^t$$

TABELLA III.

Perequazione dei tassi di extra-mortalità dei pensionati ferrovieri, per durata dall'invalidità.

Formola perequatrice: $y'_t = \alpha_{[x]}\ \beta^{t}_{[x]}$

Età all'entrata	Età raggiunta	Durata	Tassi di mortalità – Tavola – Selezionata (1)	Tassi di mortalità – Tavola – Finale (2)	Tassi di extramortalità – Grezzi (3) = (1) — (2)	Tassi di extramortalità – Perequati (4)	Tassi di mortalità selezionati (perequati) (5) = (2) + (4)
$[x] = 35$	35	0	0.10944	0.01074	0.09870	0.07680	0.08754
	36	1	04975	01116	03859	04371	05487
	37	2	03003	01161	01842	02488	03649
	38	3	02756	01210	01546	01416	02626
	39	4	01262	01262	—	—	01262
			$\alpha = 0{,}0768$		$\beta = 0{,}5692$		
$[x] = 40$	40	0	0.10944	0.01319	0.09625	0.07289	0.08608
	41	1	04852	01379	03473	03933	05312
	42	2	02953	01444	01509	02122	03566
	43	3	02756	01513	01244	01145	02658
	44	4	01588	01588	—	—	01588
			$\alpha = 0{,}0729$		$\beta = 0{,}5396$		
$[x] = 45$	45	0	0.08540	0.01668	0,06872	0.05570	0.07238
	46	1	04628	01754	02874	02869	04623
	47	2	02900	01847	01053	01478	03325
	48	3	02750	01949	00801	00761	02710
	49	4	02053	02053	—	—	02053
			$\alpha = 0{,}0557$		$\beta = 0{,}5151$		
$[x] = 50$	50	0	0.06296	0.02167	0.04129	0.04486	0.06653
	51	1	04289	02291	01998	01473	03764
	52	2	02867	02422	00445	00484	02906
	53	3	02688	02564	00124	00159	02723
	54	4	02715	02715	—	—	02715
			$\alpha = 0{,}0449$		$\beta = 0{,}3284$		

e i valori delle costanti per la mortalità dei ferrovieri invalidi osservati dal 1885 al 1902 sono dati dalla formola:

$$\mu_{[x]+t} = 0{,}00497 + 0{,}000482 \times 1{,}0737^{x} + \\ + (0{,}1585 - 0{,}002298\,[x]) \times (1{,}1229 - 0{,}01494\,[x])^{t}.$$

La formola si presenta di semplice applicazione e in forma simmetrica, sì da poter ottenere separatamente i valori delle annualità vitalizie, secondo che siano calcolati su tavola finale, ossia su osservazioni di mortalità a partire dal 4⁰ o 5⁰ anno d'invalidità, oppure su tavola selezionata.

Le costanti hanno effettivamente valori caratteristici della collettività « Ferrovieri Italiani pensionati invalidi » osservati dal 1885 al 1902. Esse sono soggette a variazione quando la formola sia da applicarsi ad altre collettività di invalidi, o ad altri periodi di osservazione.

La variabilità nella mortalità degli invalidi secondo le diversità dei gruppi studiati, è limitata alla invalidità del sottogruppo con extramortalità; quindi soltanto le costanti A e B sono suscettibili di modificazione; i valori delle tre costanti a, b e c e la relativa tavola finale ritengo si possano adottare anche per altri gruppi professionali, trattandosi della zona di rischio di morte di carattere generico, e non specifico ai ferrovieri.

Lo studio così è limitato alle parziali tavole di selezione $\mu_{[x]+t} - \mu_{[x]+\nu}$, (con $t < \nu$), che possono considerarsi caratteristiche della invalidità professionale.

Per quanto riguarda invece la variabilità della mortalità degli invalidi secondo il periodo osservato, essa fa parte dello studio generale sulla variazione secolare della mortalità. Poste a confronto le tavole d'insieme della mortalità degli invalidi ferrovieri per il periodo suddetto, con quella del periodo successivo (dal 1⁰ Luglio 1905 al 30 Giugno 1914) riscontriamo una generale e quasi proporzionale diminuzione nei tassi. Nell'insieme, la mortalità media del gruppo 1885-1902 era di

$$q_1 = \frac{6677}{117708} = 0{,}0567$$

quella del gruppo 1905-1914:

$$q_2 = \frac{9425}{177200} = 0{,}0532$$

Il coefficiente di variazione nella mortalità nei due periodi è

$$\sigma = \frac{q_2}{q_1} = 0{,}938$$

Nella Tabella IV pubblico le due tavole aggregate di mortalità nei due periodi, contenenti i tassi di mortalità distinti per ogni età, e per ogni quinquennio di età; non esiterei a proporre che, per costruire una tavola selezionata per il periodo 1905-1914 (nel quale la mortalità non fu osservata distintamente per anno di invalidità) si applichino i coefficienti di variazione nei due periodi della mortalità aggregata, accertati per ciascun quinquennio di età, per modificare le costanti A e B, ed il coefficiente di insieme σ, per modificare le costanti a, b e c.

Nella Tavola grafica, annessa al presente studio, sono riprodotte (in due scale diverse, una per le età fino a 65 anni, l'altra per le età da 60 anni in poi) le curve delle diverse probabilità di morte trattate nel presente studio: con segno continuo è rappresentata la curva grezza della mortalità selezionata e di quella finale; per la mortalità selezionata, limitatamente alle età alla entrata 35, 40, 45, 50, è riportata anche la curva perequata col metodo esposto in precedenza. Con segno tratteggiato sono rappresentate inoltre le curve della mortalità aggregata, tanto per il primo periodo di osservazione 1885-1902 che per quello successivo 1905-1914.

Nel grafico è ben distinta la diminuzione della mortalità nel secondo periodo in confronto del primo, almeno fino al 79° anno di età dell'invalido. Per il secondo periodo statistico, come ho detto, mancano i dati per la mortalità selezionata; nel presente studio ho proposto di costruire la relativa tavola mediante la formola sopraindicata, modificando i valori delle costanti trovate per il primo periodo statistico; le modificazioni sono da appor-

TABELLA IV.

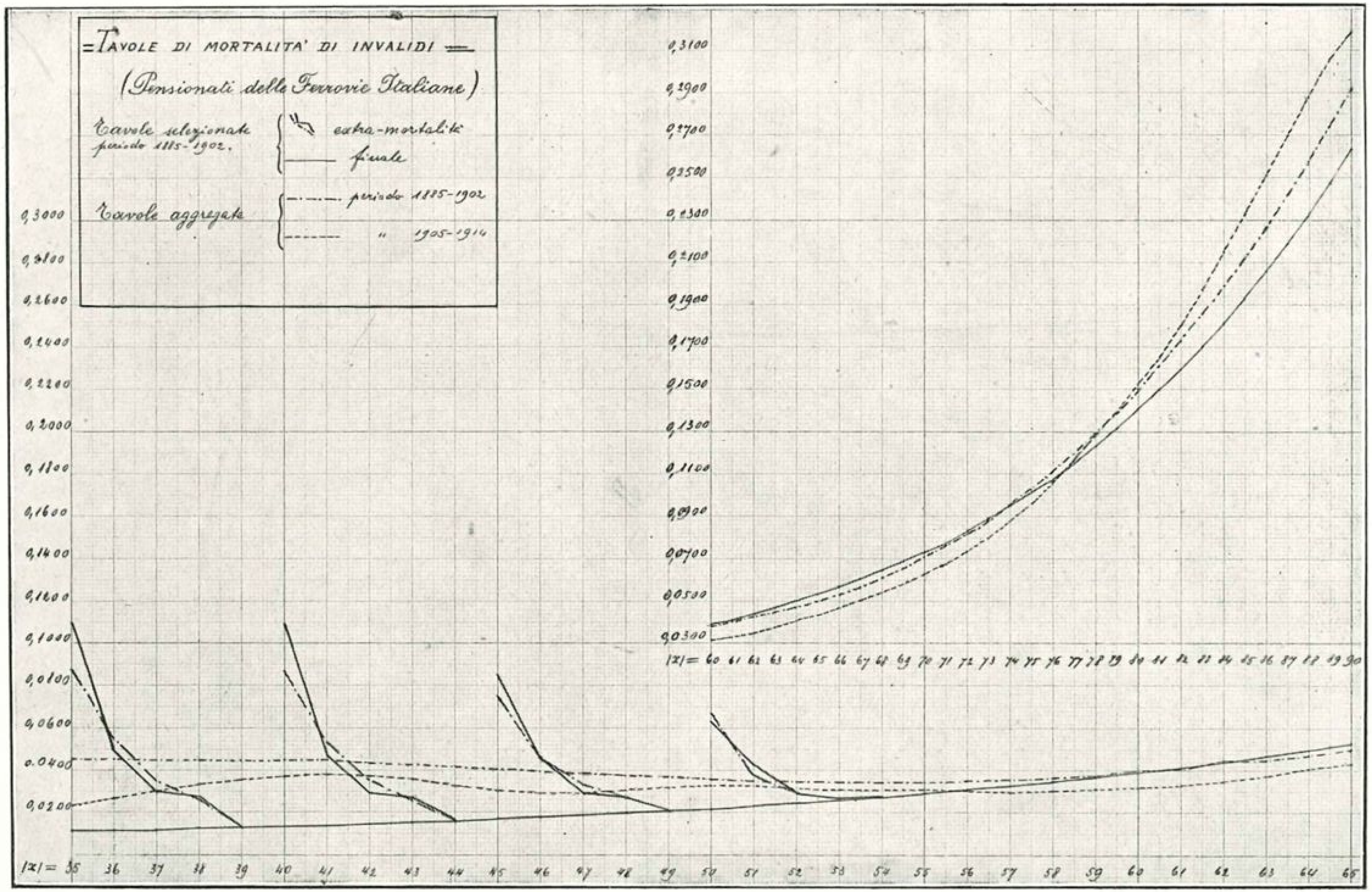
Tavole aggregate di mortalità di invalidi

(Pensionati ferrovie italiane)

Età	Periodo di osservazione 1885-1902	Periodo di osservazione 1905-1914	Età	Periodo di osservazione 1885-1902	Periodo di osservazione 1905-1914
30	0.0402	0.0109	56	0.0346	0.0300
31	0.0414	0.0122	57	0.0352	0.0298
32	0.0425	0.0149	58	0.0362	0.0301
33	0.0435	0.0167	59	0.0372	0.0307
34	0.0443	0.0200	60	0.0387	0.0318
35	0.0449	0.0235	61	0.0404	0.0333
36	0.0453	0.0269	62	0.0425	0.0352
37	0.0455	0.0301	63	0.0448	0.0376
38	0.0454	0.0329	64	0.0472	0.0405
39	0.0452	0.0356	65	0.0500	0.0435
40	0.0448	0.0375	66	0.0533	0.0467
41	0.0444	0.0383	67	0.0570	0.0502
42	0.0436	0.0376	68	0.0613	0.0540
43	0.0427	0.0360	69	0.0659	0.0582
44	0.0417	0.0328	70	0.0708	0.0627
45	0.0406	0.0302	71	0.0761	0.0677
46	0.0396	0.0291	72	0.0818	0.0735
47	0.0386	0.0292	73	0.0884	0.0801
48	0.0376	0.0303	74	0.0951	0.0876
49	0.0368	0.0317	75	0.1015	0.0962
50	0.0359	0.0327	76	0.1083	0.1059
51	0.0351	0.0324	77	0.1156	0.1167
52	0.0345	0.0317	78	0.1234	0.1281
53	0.0341	0.0311	79	0.1316	0.1400
54	0.0340	0.0306	80	0.1404	0.1524
55	0.0342	0.0303			

tarsi in misura proporzionale alla variazione generale della mortalità nei due periodi, se trattasi delle costanti a, b, c, della mortalità generale; e proporzionalmente alla variazione quinquennale delle due mortalità medesime, per le costanti A e B della mortalità extraselettiva.

Lascio agli studiosi di completare l'indagine che potrebbe formare oggetto di una più vasta trattazione di quella da me fatta, e mi ritengo soddisfatto di avere posto il problema e presentate le statistiche adatte per svilupparlo.


= TAVOLE DI MORTALITA' DI INVALIDI =
(Pensionati delle Ferrovie Italiane)
Tavole selezionate periodo 1885-1902.
extra-mortalità
finale
Tavole aggregate
periodo 1885-1902
" 1905-1914
0,3000
0,2800
0,2600
0,2400
0,2200
0,2000
0,1800
0,1600
0,1400
0,1200
0,1000
0,0800
0,0600
0,0400
0,0200
0,3100
0,2900
0,2700
0,2500
0,2300
0,2100
0,1900
0,1700
0,1500
0,1300
0,1100
0,0900
0,0700
0,0500
0,0300
|x|= 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65
|x|= 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90