MONOGRAFIE

INTORNO ALLA VALIDITÀ DEI DUE TEOREMI PARETIANI SULLA DINAMICA DISTRIBUTIVA

(*R. D'Addario*).

SOMMARIO. — 1. Breve richiamo delle equazioni proposte dal Pareto per rappresentare analiticamente la curva dei redditi. - 2. I due teoremi paretiani sulle mutue relazioni tra le variazioni del reddito minimo, del reddito medio e della concentrazione dei redditi. - 3. Dei due teoremi è valido, nella ipotesi paretiana, solamente il secondo. - 4. Discussione degli stessi teoremi assumendo un più conveniente indice di concentrazione. - 5. Si dimostra che i due teoremi sono entrambi validi per l'equazione paretiana di prima approssimazione. - 6. Due celebri proposizioni paretiane; discussione sulla loro validità. - 7-8. Un truismo ed un errore d'impostazione di calcolo di alcuni Autori. - 9. La più recente equazione riproposta per rappresentare analiticamente la curva dei redditi. - 10. Reddito medio ed indice di concentrazione dei redditi relativi alla predetta curva. - 11. Due proposizioni sulle mutue relazioni tra le variazioni del reddito minimo, del reddito medio e della concentrazione dei redditi. Conclusione sulla dinamica distributiva.

1. Indicando con N_x il numero degli individui possessori di un reddito non minore di x e con $(h, +\infty)$, essendo $h > 0$, il campo di variabilità di x, è noto che il PARETO (1) pose:

in prima approssimazione

$$N_x = \frac{k}{x^{\alpha}}, \tag{1}$$

ove $k > 0$ ed $\alpha > 1$;

(1) V. PARETO, *Cours d'économie politique*, Tomo 2°, pagg. 305-6, Lausanne, 1897.

in seconda approssimazione

[2] $$\overline{N}_x = \frac{k}{(x+a)^\alpha},$$

ove $k > 0$, $\alpha > 1$ ed a tale che $h + a > 0$.

Da dette equazioni si ottengono, per derivazione, le seguenti equazioni delle corrispondenti curve di frequenza:

[3] $$ydx = \frac{\alpha k}{x^{\alpha+1}}\,dx;$$

[4] $$\overline{y}dx = \frac{\alpha k}{(x+a)^{\alpha+1}}\,dx\cdot$$

In ogni caso, come immediatamente si vede, y è funzione decrescente di x ed ha per asintoto la direzione positiva dell'asse delle x. Le equazioni paretiane, perciò, possono essere atte a rappresentare distribuzioni di redditi zeromodali o solamente il ramo discendente di distribuzioni unimodali.

Indicando con P e con R il numero complessivo dei redditieri e rispettivamente l'ammontare complessivo dei redditi da essi posseduti, si ha

[5] $$P = \frac{k}{h^\alpha};$$

[6] $$\overline{P} = \frac{k}{(h+a)^\alpha};$$

[7] $$R = \frac{\alpha}{\alpha-1}\,hP;$$

[8] $$\overline{R} = \frac{\alpha h + a}{\alpha - 1}\,\overline{P}.$$

Infine, indicando con A il reddito medio, si ha

[9] $$A = \frac{\alpha}{\alpha-1}\,h;$$

[10] $$\overline{A} = \frac{\alpha h + a}{\alpha - 1}.$$

2. Passo al COURS ed accetto, per ora, la definizione paretiana della diseguaglianza dei redditi.

Ponendo cioè

$$[11] \qquad u_x = \frac{N_x}{N_h},$$

la diseguaglianza dei redditi, *secondo la definizione del* PARETO, diminuisce quando u_x cresce.

Per la [2] è

$$[12] \qquad u_x = \left[\frac{h+a}{x+a}\right]^\alpha .$$

« Puisque $x > h$, on voit immédiatement que u_x croîtra quand α décroît. Ainsi, l'inégalité des revenus augmente et diminue avec α.

« En différentiant l'équation [12], nous avons

$$[13] \qquad \frac{du_x}{u_x} = log\frac{h+a}{x+a} \cdot d\alpha + \alpha\left[\frac{1}{h+a} - \frac{1}{x+a}\right] da \cdot$$

« Si α est constant, c'est-à-dire, si $d\alpha = 0$, u_x croîtra avec da; donc, l'inégalité des revenus diminue quand a croît.

« Si l'on fait varier ensemble α et a, l'inégalité des revenus diminuera quand α décroîtra et a croîtra. Mais si α croissait en même temps que a, on ne pourrait plus dire, en général, si l'inégalité des revenus croît ou décroît. Cette inégalité augmenterait pour certains revenus et diminuerait pour d'autres » (1).

Differenziando la [10] si ha

$$[14] \qquad d\overline{A} = \frac{\alpha}{\alpha-1}\, dh + \frac{1}{\alpha-1}\, da - \frac{h+a}{(\alpha-1)^2}\, d\alpha \cdot$$

Il reddito medio, cioè, è funzione decrescente di α e funzione crescente di h e di a.

Ed ecco i due teoremi paretiani:

« 1° Si l'inégalité des revenus ne change pas, c'est-à-dire si da et $d\alpha$ sont nuls, $d\overline{A}$ ne peut augmenter que si dh croît et

(1) V. PARETO, *Cours*, cit., Tomo 2°, nota a pag. 321.

vice–versa. L'augmentation du total des revenus, par rapport à la population, produit donc nécessairement l'augmentation du revenu minimum, et vice–versa.

« 2° Si le revenu minimum h demeure constant, c'est–à–dire si dh est nul, la diminution générale de l'inégalité des revenus se produit quand a croît ou α décroît et, alors, $d\bar{A}$ croît. La diminution générale de l'inégalité des revenus ne peut donc être obtenue que si le total des revenus augmente par rapport à la population.

« L'inverse n'est pas vrai, parce que l'augmentation de $\bar{A}$ peut se produire quand da et $d\alpha$ sont positifs, ce qui augmente l'inégalité de certains revenus et diminue celle de certains autres. Mais l'équation [14] fait voir qu'il faut, pour cela, admettre que a puisse varier beaucoup, ce qui exclut, du moins en général, les revenus totaux, pour lesquels, ainsi que nous l'avons vu, a est nul ou fort petit » (1).

3. Ho riprodotto fedelmente i due teoremi del PARETO, variando solamente un simbolo (PARETO indica con Z il reddito medio, mentre io lo indico con A) ed il numero d'ordine delle formule.

Il 1° teorema, a mio modo di vedere, non è valido. Esso, se non m'inganno, è il risultato di una svista. Infatti, dalla [12] si vede chiaramente che u_x è funzione di h, di α e di a e non solo di α e di a, come ammette il PARETO. Il differenziale totale di $log u_x$ è quindi

$$[15] \quad \frac{du_x}{u_x} = log\,\frac{h+a}{x+a}\cdot d\alpha + \alpha\left[\frac{1}{h+a} - \frac{1}{x+a}\right]da + \alpha\,\frac{1}{h+a}\,dh\,,$$

e cioè u_x è funzione decrescente di α e crescente di a e di h.

Ora, se la diseguaglianza generale dei redditi non cambia, se cioè dh, $d\alpha$ e da sono nulli, conseguentemente anche il reddito medio non subisce nè può subire alcuna variazione.

Il 2° teorema non dà motivo ad alcuna osservazione.

Infatti, se $d\,h = 0$, dalla [15] appare evidente che la diminuzione generale della diseguaglianza distributiva, secondo la defi-

(1) V. PARETO, *Cours*, cit., Tomo 2°, nota a pag. 322.

nizione paretiana, si ha quando $da > 0$ e $d\alpha < o$ ed allora anche il reddito medio cresce.

4. La definizione paretiana della diseguaglianza dei redditi ha dato luogo a varie critiche.

Queste critiche sono ben note, non è il caso di starle qui a ricordare e perciò passo senz'altro al calcolo di un indice misuratore più confacente alla comune nozione di diseguaglianza distributiva.

Di indici siffatti ne sono stati proposti a dovizia, ma considerazioni di varia natura, che reputo superfluo qui ripetere, mi inducono a preferire il comune scostamento semplice medio rapportato al suo limite superiore.

È questo, ovviamente, un indice di significato chiaro e di calcolo immediato. Esso, com'è facile vedere, varia tra zero (eguaglianza perfetta) ed uno (massima diseguaglianza).

Se vale la [2], indicando tale indice con $\overline{S}$, si ha

$$[16] \qquad \overline{S} = \frac{\int_{\overline{A}}^{\infty} (x - \overline{A})\, y dx}{\overline{R}} = \left[\frac{\alpha - 1}{\alpha}\right]^{\alpha - 1} \frac{a + h}{\alpha h + a}.$$

L'indice $\overline{S}$, cioè, è funzione dei parametri α, h ed a. La diseguaglianza dei redditi, cioè, è funzione anche del reddito minimo h e non solo dei parametri α ed a come afferma il PARETO.

È poi

$$[17] \quad log\,\overline{S} = (\alpha - 1)\,[log\,(\alpha - 1) - log\,\alpha] + log\,(a + h) - log\,(\alpha h + a)$$

e differenziando

$$[18] \quad \frac{d\overline{S}}{\overline{S}} = \left[log\frac{\alpha - 1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} - \frac{h}{\alpha h + a}\right] d\alpha + \left[\frac{1}{a + h} - \frac{1}{\alpha h + a}\right] da + $$
$$+ \left[\frac{1}{a + h} - \frac{\alpha}{\alpha h + a}\right] dh \,.$$

Cioè, $\overline{S}$ è funzione crescente di a, funzione decrescente di α, funzione decrescente di h se $a > 0$, funzione crescente di h se $a < 0$; mentre il reddito medio, come è stato visto, è funzione decrescente di α e funzione crescente di a e di h.

La mia negazione del primo teorema paretiano trova qui nuova conferma. Infatti, se la diseguaglianza generale dei redditi non cambia, cioè se $d\alpha$, da e dh sono nulli, anche il reddito medio non subisce, nè può subire alcuna variazione.

Il 2° teorema, invece, data la nuova definizione della diseguaglianza dei redditi, assume la forma:

Se il reddito minimo resta costante, l'aumento generale della diseguaglianza dei redditi (cioè quando a cresce ed α decresce) produce un aumento del reddito medio.

5. Cosa avviene, invece, quando vale la [1], cioè la funzione paretiana di prima approssimazione?

In questo caso si ha

$$[19] \qquad \mathrm{S} = \frac{\int_A^\infty (x - \mathrm{A})\, y dx}{\mathrm{R}} = \left[\frac{\alpha - 1}{\alpha}\right]^{\alpha - 1} \frac{1}{\alpha}$$

cioè, l'indice S è funzione del solo parametro α e propriamente, come immediatamente si vede, esso è funzione decrescente di α. In questo caso, quindi, come indice di diseguaglianza può essere assunto lo stesso parametro α e la diseguaglianza sarà tanto più forte, quanto minore sarà il valore di α.

Dalla [9] si vede, inoltre, che il reddito medio è funzione decrescente di α e funzione crescente di h, sicchè:

1° *se la diseguaglianza dei redditi non cambia, il reddito medio non può aumentare se non aumenta il reddito minimo e viceversa;*

2° *se il reddito minimo resta costante, l'aumento della diseguaglianza dei redditi produce un aumento del reddito medio e viceversa.*

I due teoremi paretiani, cioè, valgono *senza limitazioni* quando si ammette la [1].

I due teoremi sopraenunciati valgono anche dal punto di vista *statico*. Infatti dalla [9] si ricava che, date più distribuzioni relative allo stesso istante:

1° *se la diseguaglianza dei redditi è uguale in tutte le distribuzioni, ove maggiore è il reddito medio, maggiore è anche il reddito minimo e viceversa;*

2° *se il reddito minimo è uguale in tutte le distribuzioni, ove maggiore è il reddito medio, maggiore è anche la diseguaglianza dei redditi e viceversa.*

6. Ho riprodotto e discusso i due teoremi paretiani, poichè essi costituiscono, secondo lo stesso PARETO, la dimostrazione delle due seguenti celebri proposizioni (1):

I – 1° *Un aumento dell'entrata minima;* 2° *un aumento della disuguaglianza delle entrate, non possono avere luogo, congiunti o separati, se non accade che il totale delle entrate cresca più rapidamente che la popolazione.*

II – *Ogni qualvolta il totale delle entrate cresce più rapidamente che la popolazione, ossia quando cresce la media delle entrate per ogni invididuo, si producono, separati o congiunti, gli effetti seguenti:* 1° *un aumento dell'entrata minima;* 2° *un aumento della diseguaglianza delle entrate.*

Il PARETO aggiunge che la II proposizione « *ha valore con una eccezione teorica che difficilmente può verificarsi in pratica, onde si può ritenere, tolta quell'eccezione, che abbia luogo la proposizione* ».

L'importanza economica e sociologica di queste proposizioni è grandissima. Molti Autori l'hanno senz'altro accettate e su di esse hanno fondato alcune loro ricerche.

Si è visto (riportando fedelmente la dimostrazione del COURS, a cui il Sommo Economista sempre rimanda) che il PARETO basa la dimostrazione sulla [2] e cioè sulla equazione di seconda approssimazione.

(1) V. PARETO, *Manuale di economia politica*, pagg. 372–373; *Manuel d'économie politique*, pag. 392, Paris, 1927; *Cours*, cit., Tomo 2, pagg. 320–326; *Trattato di sociologia generale*, 2ª edizione, Volume 1°, pag. 34.

L'analisi e la discussione, purtroppo, hanno condotto a notare che nella dimostrazione paretiana si nasconde una svista analitica sino ad oggi non rilevata. La stessa analisi e la stessa discussione, pertanto, conducono alla conclusione che le due soprariportate proposizioni non sono valide se si ammette, come vuole il PARETO, la equazione [2].

Cosa avviene, invece, se si ammette la [1] e cioè l'equazione paretiana di prima approssimazione?

Dalla [9] si ricava immediatamente che:

Ogni qualvolta cresca il reddito medio per individuo, si producono anche, congiunti o separati, un aumento del reddito minimo o un aumento della diseguaglianza dei redditi.

Questa, evidentemente, è una proposizione di natura *storica* o *dinamica*, ma vale, *mutatis mutandis*, anche dal punto di vista *statico*. Infatti, dalla stessa [9] si ricava che, date più distribuzioni relative allo stesso istante:

Ove maggiore è il reddito medio per individuo, maggiore è anche o il reddito minimo o la diseguaglianza dei redditi o l'uno e l'altra assieme.

La proposizione paretiana, invece, per la quale:

Un aumento dell'entrata minima od un aumento della diseguaglianza delle entrate non possono avere luogo, congiunti o separati, se non accade che il totale delle entrate cresca più rapidamente che la popolazione, non vale, *in ogni caso*, nemmeno per la [1], in quanto dalla [9] appare chiaro che è possibile avere un aumento del reddito minimo (o un aumento della diseguaglianza dei redditi) senza che *necessariamente* si abbia un aumento del reddito medio. Solamente un *contemporaneo* aumento del reddito minimo e della diseguaglianza dei redditi porta *necessariamente* ad un aumento del reddito medio.

7. Si è visto che, valendo la [1], se il reddito minimo h resta costante, *ove maggiore* è la diseguaglianza dei redditi, *maggiore* è il reddito medio e viceversa (proposizione statica); oppure, *crescendo* la diseguaglianza dei redditi, *cresce* anche il reddito medio e viceversa (proposizione dinamica).

Sicchè, se, per esempio, si studia la distribuzione dei redditi nelle diverse ripartizioni geografiche di un determinato Stato ad una certa epoca e, più o meno felicemente, si rappresentano le distribuzioni corrispondenti, *aventi tutte lo stesso reddito minimo*, con l'equazione data dal PARETO in prima approssimazione, *segue necessariamente* che, nelle ripartizioni geografiche in cui maggiore è la diseguaglianza dei redditi, maggiore è il reddito medio e viceversa.

Ebbene, a malgrado tutto ciò, si sono avute, in epoche remote e recenti, delle curiose applicazioni. Cioè, dopo avere rappresentato le distribuzioni osservate (relative alle diverse ripartizioni geografiche ed alla stessa epoca), aventi tutte lo stesso reddito minimo, con la predetta funzione paretiana, ed avere assunto il parametro α come indice di diseguaglianza, si è passati al calcolo del cosidetto indice di cograduazione tra la graduatoria dei valori di α e la graduatoria dei corrispondenti *valori osservati* di A, allo scopo di accertare l'eventuale esistenza di una relazione tra l'altezza del reddito medio e l'intensità della diseguaglianza dei redditi. Il valore ed il segno di tale indice di cograduazione hanno condotto gli Autori a concludere che « *in generale*, ove maggiore è il reddito medio, maggiore è la diseguaglianza dei redditi e viceversa » (1).

Ora, questo calcolo, oltre a costituire, per quanto sopra ho detto, un truismo, è anche impostato male. Infatti, detti Autori hanno messo a fronte i valori di α coi valori *osservati* di A, mentre tra gli uni e gli altri non esiste omogeneità di corrispondenza: esiste, per così dire, *corrispondenza di origine*, ma non esiste *corrispondenza attuale*. La relazione, ovviamente, doveva essere cercata tra i valori di α ed i corrispondenti valori *calcolati* di A. Infatti, se le distribuzioni osservate si rappresentano con una certa funzione, è appena necessario avvertire (per lo stesso scopo della rappresentazione analitica delle distribuzioni statistiche) che

(1) Cito, a titolo di esempio, solo due lavori: uno remoto ed uno recente. E. PORRU, *La concentrazione della ricchezza nelle diverse regioni d'Italia*, Cagliari, 1912; S. ORLANDI, *Su la distribuzione dei redditi mobiliari in Italia*, Roma, 1933.

quelle distribuzioni scompaiono, non esistono più e resta, invece, di ognuna d'esse, la fotografia sintetica: la funzione prescelta i cui parametri hanno assunto particolari valori. Le caratteristiche di ogni distribuzione, perciò, si esprimono tutte in funzione di detti parametri.

Se i predetti Autori avessero tenuto presenti queste ovvie considerazioni, avrebbero immediatamente notato che la graduatoria delle circoscrizioni geografiche secondo i valori (calcolati) decrescenti di A è identica alla graduatoria delle stesse circoscrizioni secondo i valori crescenti di α. Avrebbero notato, insomma, attraverso l'espressione analitica del reddito medio, che la loro ricerca era inutile, in quanto la relazione che cercavano era ed è caratteristica della funzione perequatrice prescelta.

Il truismo segnalato è evidente e non richiede altri chiarimenti. Se quegli Autori, tuttavia, non ne fossero pienamente convinti, possono persuadersene immediatamente calcolando i valori dei parametri della funzione perequatrice col metodo dei momenti, anzichè col metodo CAUCHY–BENINI.

L'osservazione statistica fornisce, di ogni distribuzione, il numero complessivo dei redditieri P, l'ammontare complessivo dei redditi da essi posseduti R ed il reddito minimo h (eguale in tutte le circoscrizioni geografiche che si esaminano).

I parametri da determinare sono due (α e k), sicchè, eguagliando i primi due momenti empirici ai corrispondenti momenti teorici, si avrà

$$\begin{cases} P = \dfrac{k}{h^{\alpha}} \\[2ex] R = \dfrac{\alpha}{\alpha - 1} h \cdot \dfrac{k}{h^{\alpha}}, \end{cases}$$

da cui, dividendo la seconda per la prima equazione, si ha

$$\frac{R}{P} = A = \frac{\alpha}{\alpha - 1} h,$$

e quindi

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{\mathrm{R}}{\mathrm{R} - h\mathrm{P}} = \dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{A} - h} \\ k = \mathrm{P}h^{\alpha}, \end{cases}$$

cioè, in quelle circoscrizioni in cui maggiore è il valore di A (in questo caso il reddito medio calcolato coincide col reddito medio osservato) minore è il valore di α (maggiore è la diseguaglianza dei redditi) e viceversa. Insomma, la graduatoria delle circoscrizioni geografiche secondo i valori decrescenti di A è identica alla graduatoria delle stesse circoscrizioni secondo i valori crescenti di α e perciò l'indice di cograduazione è uguale a $+1$; si ha, cioè, concordanza perfetta.

8. Ho l'impressione che qualcuno dei predetti Autori stia già per eccepire che egli ha usato, come indice di diseguaglianza, non solo il parametro α ma anche anzi, a preferenza di α, il cosidetto indice δ.

L'eccezione non ha alcun valore, in quanto il truismo e l'errore d'impostazione segnalati permangono per intero anche quando si tratti dell'indice δ.

Cos'è, infatti, questo indice δ?

Il Gini, per esprimere la frequenza complessiva degli individui possessori di un reddito non minore di x, cioè $\dfrac{1}{\mathrm{P}}\displaystyle\int_x^{\infty} y dx$, in funzione della frazione del reddito complessivo da detti redditieri posseduta, cioè $\dfrac{1}{\mathrm{R}}\displaystyle\int_x^{\infty} xy dx$, pose

$$\frac{1}{\mathrm{P}}\int_x^{\infty} y\,dx = \frac{1}{\mathrm{R}^{\delta}}\left[\int_x^{\infty} xy\,dx\right]^{\delta}, \tag{20}$$

essendo δ una costante positiva maggiore dell'unità. La [20] è, ovviamente, l'equazione di una *curva di concentrazione*.

Ora, qual'è la forma che bisognerà assegnare alla y perchè resti soddisfatta la [20] ? Qual'è, cioè, l'equazione della *curva di ripartizione semplice* corrispondente alla predetta *curva di concentrazione* ?

La ricerca è semplicissima. Da [20] si ha immediatamente

$$\left[\int_x^\infty y\,dx\right]^{\frac{1}{\delta}} = \frac{P^{\frac{1}{\delta}}}{R}\int_x^\infty xy\,dx,$$

da cui, derivando, si ha

$$\frac{1}{\delta}\left[\int_x^\infty y\,dx\right]^{\frac{1-\delta}{\delta}} y = \frac{P^{\frac{1}{\delta}}}{R}\,xy,$$

e ponendo

$$\alpha = \frac{\delta}{\delta - 1} \quad ; \quad k = \frac{R^{\frac{\delta}{\delta-1}}}{\delta^{\frac{\delta}{\delta-1}}\, P^{\frac{1}{\delta-1}}}$$

si ha ancora

$$N_x = \frac{k}{x^\alpha},$$

che è, come si vede, l'equazione proposta da PARETO, in prima approssimazione, per rappresentare il numero degli individui possessori di un reddito non minore di x.

Derivando ancora si ha infine

$$y = \frac{\alpha k}{x^{\alpha+1}}$$

cioè, perchè valga la [20], la y dovrà assumere la forma assegnata dal PARETO in prima approssimazione.

La [20], quindi, non è altro che una trasformata funzionale (equazione della curva di concentrazione corrispondente alla prima curva paretiana di ripartizione semplice) della prima equazione paretiana e perciò tutte le proprietà di questa si riflettono nella prima e viceversa.

Il reddito medio e l'indice di diseguaglianza corrispondenti alla [20] sono

$$\text{[21]} \qquad A = h\delta;$$

$$\text{[22]} \qquad \delta = \left[\frac{1}{\delta}\right]^{\frac{1}{\delta - 1}} \frac{\delta - 1}{\delta}.$$

Differenziando si ha

$$\text{[23]} \qquad dA = hd\delta + \delta dh;$$

$$\text{[34]} \qquad d\log \delta = \frac{\log \delta}{(\delta - 1)^2}\, d\delta,$$

cioè, il reddito medio è funzione crescente di h e di δ e la diseguaglianza dei redditi è funzione crescente di δ. Non c'è, ora, che ripetere le proposizioni paretiane, tenendo solamente presente che, mentre α varia in senso inverso, δ varia nello stesso senso della diseguaglianza dei redditi. In particolare, se h resta costante, reddito medio e diseguaglianza dei redditi variano nello stesso senso.

Concludendo, se vale la [20] ed h resta costante, *segue necessarianente* che *ove maggiore* è il reddito medio, maggiore è la diseguaglianza dei redditi e viceversa (proposizione statica); ovvero, *crescendo* il reddito medio, cresce anche la diseguaglianza dei redditi e viceversa (proposizione dinamica).

L'uso di δ, insomma, come prima avevo affermato, non salva per nulla, quegli Autori, nè dal truismo segnalato, nè tanto meno dall'errore di impostazione del calcolo del cosidetto indice di cograduazione.

9. Si è visto che le funzioni paretiane possono essere atte a rappresentare distribuzioni zeromodali o il ramo discendente di distribuzioni unimodali. Sarà bene, perciò, considerare l'equazione recentemente riproposta (1) per rappresentare analiticamente di-

(1) R. D'Addario, *La curva dei redditi*, in « Rivista Italiana di Statistica », anno III, n. 2-3; *Intorno ad una curva di ripartizione*, in « Rivista Italiana di Statistica, Economia e Finanza », anno IV, n. 4.

stribuzioni unimodali di redditi. Questa equazione ha dato ottimi risultati: gli scarti tra frequenze osservate e frequenze calcolate sono lievissimi.

L'equazione è, essendo $f(x)$ la densità dei redditi,

$$[25] \qquad f(x) = \frac{\log e}{(x-h)\, s \sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2s^2}[\log (x-h) - m]^2},$$

ove: x varia nel campo $h < x < \infty$; i logaritmi sono decimali; s è una costante positiva; h è una costante positiva o nulla; m è una costante positiva, negativa o nulla; e è la base dei logaritmi neperiani; $\pi = 3{,}1415...$

Essa sta a rappresentare, graficamente, una curva unimodale ed asimmetrica a destra, il cui primo ramo nasce nel punto di coordinate $(h\,,0)$, il secondo ramo ha per asintoto la direzione positiva dell'asse delle x e la moda è uguale a (1)

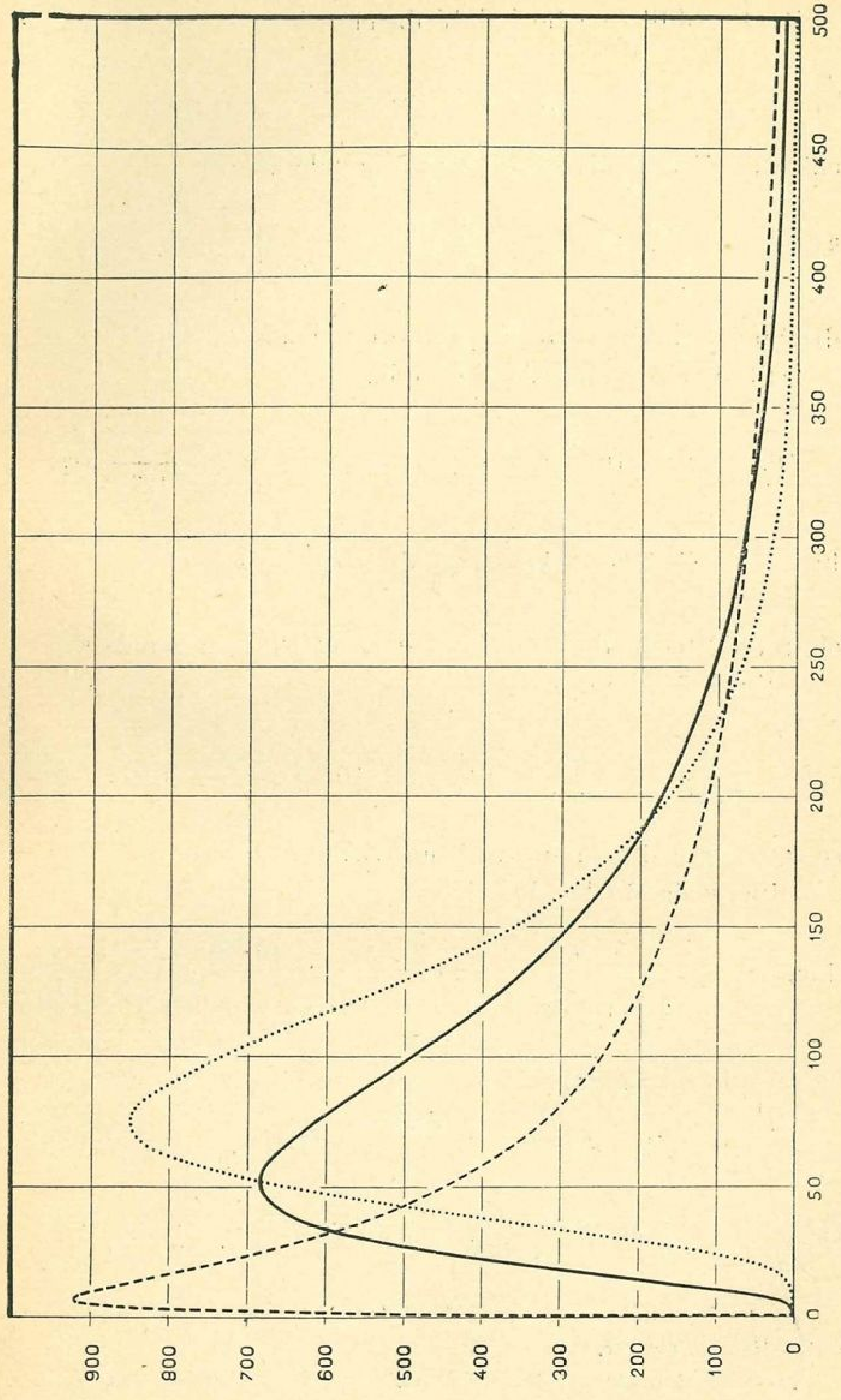
$$[26] \qquad v = h + 10^{-\frac{s^2}{\log e} + m}.$$

Uno sguardo al grafico, nel quale sono rappresentate le curve corrispondenti ai seguenti valori dei parametri:

	Curva	h	s	m
(*linea tratteggiata del grafico*)	I	0	$\frac{1}{2}$	0
(*linea piena del grafico*)	II	0	$\frac{1}{8}$	0
(*linea punteggiata del grafico*)	III	0	$\frac{1}{18}$	0

è già sufficiente per avere una nozione completa sulla forma della [25].

(1) R. D'Addario, *La curva dei redditi*, già cit.; *Intorno ad una curva di ripartizione*, già cit.


0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500
900
800
700
600
500
400
300
200
100
0

10. Il reddito medio è dato da (1)

$$A = h + 10^{\frac{s^2}{2\,log\,e} + m}, \tag{27}$$

mentre l'indice di diseguaglianza è uguale ad (2)

$$\delta = \frac{A - h}{A}\,\Theta\left[\frac{1}{\sqrt{8}\,log\,e}\,s\right], \tag{28}$$

indicando Θ il ben noto integrale di LAPLACE.

Dalla [27], differenziando, si ha

$$dA = dh + 10^{\frac{s^2}{2\,log\,e} + m}\,\frac{s}{log^2\,e}\,ds + 10^{\frac{s^2}{2\,log\,e} + m}\,\frac{1}{log\,e}\,dm$$

$$= dh + (A - h)\left[\frac{s}{log^2\,e}\,ds + \frac{1}{log\,e}\,dm\right], \tag{29}$$

cioè, il reddito medio è funzione crescente di h, di s e di m.

Dalla [28] si ha

$$Log\,\delta = \frac{s^2}{2\,log^2\,e} + \frac{m}{log\,e} - Log\left[h + 10^{\frac{s^2}{2\,log\,e} + m}\right] + Log\,\Theta\left[\frac{1}{\sqrt{8}\,log\,e}\,s\right], \tag{30}$$

ove con Log è stato indicato il logaritmo neperiano.

Differenziando la [30] si ha

$$d\,Log\,\delta = -\frac{1}{h + 10^{\frac{s^2}{2\,log\,e} + m}}\,dh + \left[1 - \frac{10^{\frac{s^2}{2\,log\,e} + m}}{h + 10^{\frac{s^2}{2\,log\,e} + m}}\right]\frac{1}{log\,e}\,dm$$

$$+ \left\{\left[1 - \frac{10^{\frac{s^2}{2\,log\,e} + m}}{10 + h^{\frac{s^2}{2\,log\,e} + m}}\right]\frac{s}{log^2\,e} + \frac{e^{-\frac{s^2}{8\,log^2\,e}}}{\Theta\left[\frac{1}{\sqrt{8}\,log\,e}\,s\right]\sqrt{2\,\pi}\,log\,e}\right\}ds$$

$$= -\frac{1}{A}\,dh + \left[\frac{h}{A}\,\frac{s}{log^2\,e} + K\right]ds + \frac{h}{A}\,\frac{1}{log\,e}\,dm \tag{31}$$

(1) R. D'ADDARIO, *La curva dei redditi*, già cit.; *Intorno ad una curva di ripartizione*, già cit.

(2) R. D'ADDARIO, *Intorno ad una curva di ripartizione*, già cit.

ove, per brevità, si è posto

$$K = \frac{e^{-\frac{s^2}{8\, log^2 e}}}{\Theta\left[\frac{1}{\sqrt{8}\ log\, e}\, s\right]\sqrt{2\pi}\ log\, e} > 0\,.$$

Si vede chiaramente, così, che l'indice di diseguaglianza è funzione decrescente di h e crescente di s e di m.

Brevemente

$$A \begin{cases} \text{è funzione crescente di } h \\ \text{è funzione crescente di } s \\ \text{è funzione crescente di } m \end{cases}$$

$$\delta \begin{cases} \text{è funzione decrescente di } h \\ \text{è funzione crescente di } s \\ \text{è funzione crescente di } m \end{cases}$$

11. Ho considerato le quantità:

$$[32] \qquad \begin{cases} h \text{ reddito minimo;} \\ A \text{ reddito medio;} \\ \delta \text{ indice di concentrazione dei redditi,} \end{cases}$$

poichè esse sono le *costanti fondamentali* che caratterizzano compiutamente ogni distribuzione di redditi.

Sono in numero di tre, cioè quanti sono i parametri indipendenti

$$[33] \qquad h,\ s,\ m,$$

che compaiono nell'equazione della curva dei redditi considerata, e cioè la [25].

Le costanti A ed δ si esprimono, attraverso la [27] e la [28], mediante i parametri [33], mentre h figura contemporaneamente fra le [32] e i [33].

La [27] e la [28] stanno ad indicare che le [32] sono indipendenti; nel senso, cioè, che si può pensare che una di esse varii, senza che per questo debbano *necessariamente* variare le altre. Una variazione del reddito minimo, per esempio, non porta *necessariamente* una variazione del reddito medio o dell'indice di concentrazione dei redditi, in quanto si possono sempre avere concomitanti variazioni dei parametri s ed m tali che A ed δ restino invariati.

Tuttavia:

I. *Un aumento generale della concentrazione dei redditi* (*cioè quando* $dh < o$, $ds > o$ *e* $dm > o$) *produce un aumento del reddito medio unicamente e solamente quando*

$$| dh | < (A - h) \left[\frac{1}{log\, e} dm + \frac{s}{log^2 e} ds \right] .$$

Infatti, perchè si abbia

$$dA > 0 ,$$

ossia, per la [29],

$$dh + (A - h) \left[\frac{1}{log\, e} dm + \frac{s}{log^2 e} ds \right] > 0 ,$$

dovrà essere, essendo per ipotesi $dh < 0$,

$$(A - h) \left[\frac{1}{log\, e} dm + \frac{s}{log^2 e} ds \right] > | dh | .$$

In particolare, se $dh = 0$, un aumento generale della concentrazione dei redditi (cioè quando $ds > o$ e $dm > o$) produce sempre un aumento del reddito medio.

II. *Un aumento generale del reddito medio* (*cioè quando* $dh > o$, $ds > o$ *e* $dm > o$) *produce un aumento della concentrazione dei redditi unicamente e solamente quando*

[35] $$dh < h \left[\frac{1}{log\, e} dm + \frac{s}{log^2 e} ds \right] + AK\, ds .$$

Infatti, perchè sia

$$d \operatorname{Log} \delta > 0$$

ovvero, per la [31],

$$\frac{h}{A}\left[\frac{1}{\log e}\, dm + \frac{s}{\log^2 e}\, ds\right] + K\, ds - \frac{1}{A}\, dh > 0\,,$$

dovrà essere

$$h\left[\frac{1}{\log e}\, dm + \frac{s}{\log^2 e}\, ds\right] + AK\, ds > dh\,.$$

In particolare, se $dh = o$, un aumento generale del reddito medio (cioè quando $ds > o$ e $dm > o$) produce sempre un aumento della concentrazione dei redditi.

Dalle proposizioni enunciate, insomma, si deduce che *non sempre* ad un aumento *generale* della concentrazione dei redditi segue un aumento del reddito medio; e, viceversa, *non sempre* ad un aumento *generale* del reddito medio segue un aumento della concentrazione dei redditi (1).

La dinamica distributiva è troppo complessa per potere essere sintetizzata in poche e schematiche proposizioni. Essa, in vero, è molto più complessa di quanto comunemente si pensi. « In generale si va soddisfatti quando si possa dire come si presenta il fenomeno in un piccolo tratto della sua curva; se esso cioè acquisti o perda di intensità. E poi si proietta nel futuro quell'acquisto o quella perdita, come se le singole forze che determinano l'andamento del fenomeno dovessero mantenere inalterato il loro peso. Ben altra è la legge del divenire. Il prolungamento di un tratto

(1) La casistica relativa ad un aumento *parziale* della concentrazione dei redditi e ad un aumento *parziale* del reddito medio è ampiamente sviluppata in una monografia di prossima pubblicazione (R. D'Addario, *La curva dei redditi*, prefazione di L. Amoroso), ove, fra l'altro, si trova una analisi critica delle osservazioni del Pigou alle proposizioni paretiane sulla dinamica distributiva (A. C. Pigou, *The economics of welfare*, pagg. 605–13, London, 1924).

ascendente o discendente di una curva storica è una via che si traccia verso l'assurdo. Poichè i movimenti particolari non sono liberi: la loro direzione e la loro velocità si coordinano nell'universale. *Accelerazioni positive o negative costanti non si ritrovano che nei paesi dei nostri sogni o nelle deformazioni scientifiche del concreto* » (1).

Reddito minimo, reddito medio e grado di concentrazione dei redditi sono, come ho detto, le costanti fondamentali che caratterizzano compiutamente ogni distribuzione di redditi.

Sono queste, infatti, le caratteristiche le cui variazioni consentono una compiuta analisi della dinamica distributiva, in quanto il benessere economico e l'armonia fra le classi sociali sono principalmente funzioni di quelle tre variabili.

L'attenzione degli studiosi si è finora *particolarmente* rivolta alla dinamica del grado di concentrazione dei redditi e quasi sempre è stato appena sfiorato, se non trascurato o dimenticato del tutto, il problema fondamentale delle mutue relazioni tra le variazioni delle tre menzionate caratteristiche fondamentali.

È merito insigne del nostro PARETO l'avere, per primo, richiamato *esplicitamente* l'attenzione su questo problema fondamentale, mentre la sua analisi sulle mutue relazioni tra le variazioni del reddito minimo, del reddito medio e del grado di concentrazione dei redditi costituisce un modello insuperabile, che sarà bene e doveroso riportare alla ribalta scientifica nella sua vera e piena luce. Questo modello è relegato in una nota del *Cours*, onde vien fatto di pensare che una miniera da sfruttare ancora compiutamente sta proprio in quelle brillanti e meravigliose note di economia concreta seminate e relegate, con noncuranza da gran signore, a piè di ogni pagina del *Cours*.

(1) A. DE' STEFANI, *La dinamica patrimoniale nell'odierna economia capitalistica*, pag. 142, Padova, 1921.