V.

QUESTIONI MATEMATICHE

SULL'IMPIEGO DI ALCUNE FUNZIONI TRASCENDENTI NELLE RAPPRESENTAZIONI EMPIRICHE

(*Conferenza del prof. G. Cassinis*) (*).

GENERALITÀ. — Il problema della deduzione di formule empiriche destinate a rappresentare quantitativamente i fenomeni si scinde in due problemi successivi (1):

1° assegnazione della forma della funzione rappresentatrice, contenente un certo numero di parametri;

2° determinazione dei valori numerici dei parametri.

Esula dallo scopo di questa lezione lo studio approfondito dei due problemi e, in particolare, del secondo. È noto che per la sua risoluzione possono seguirsi diverse vie, le quali, in sostanza, rientrano tutte nel *metodo dei moltiplicatori* di CAUCHY. Alcuni di questi procedimenti, come per esempio il metodo delle somme, sono di facile e rapida applicazione numerica, almeno quando le equazioni del problema siano ridotte lineari nei parametri incogniti; altri, come il metodo dei minimi quadrati e quello dei momenti, richiedono calcoli piuttosto laboriosi, la mole dei quali cresce rapidamente con l'aumentare del numero dei parametri che compariscono nella formula empirica scelta. D'altra parte, i primi metodi difettano in modo assoluto di basi logiche, rivestendo il carattere di procedimenti del tutto empirici, che in molti casi non possono essere impiegati, anche per il fatto che, variando le modalità del calcolo, in causa della stessa sua arbitrarietà, si ottengono risultati numerici diversi e, qualche volta, notevolmente diversi

(*) Tenuta il giorno 11 giugno 1929.

(1) Ci riferiamo, per semplicità, al caso di una sola variabile indipendente.

uno dall'altro. Perciò occorre di frequente, così nelle Scienze fisiche, come nella Statistica e nell'Economia, di dover adoperare i metodi più complessi.

Sia per aderire alla realtà del fenomeno in esame e per corrispondere ad un intuitivo concetto di semplicità, sia per evitare calcoli eccessivamente laboriosi e lunghi, per la risoluzione del primo dei problemi che ci siamo posto, si cerca di scegliere una funzione di forma relativamente semplice e contenente il minimo numero possibile di parametri. Le forme classiche impiegate per la rappresentazione dei fenomeni aperiodici sono: polinomi interi (interpolazione parabolica), somme di termini con potenze non intere della variabile indipendente, somme di esponenziali; mentre nel caso dei fenomeni periodici si adopera il polinomio di FOURIER. Queste forme fondamentali possono combinarsi tra loro dando luogo a formule più complesse, utili in diverse circostanze. Qualche volta si impiegano polinomi di funzioni sferiche (polinomi di LEGENDRE) e questo è quasi l'unico caso in cui si ricorra a funzioni che differiscono dalle consuete dell'analisi elementare, ma la differenza non può dirsi sostanziale, perchè i polinomi di LEGENDRE sono polinomi interi nella variabile indipendente.

La scelta della forma della funzione interpolatrice, e soprattutto quella del numero dei parametri da introdurre, si fa appoggiandosi a ragioni teoriche o sperimentali oppure ad analogie con altri fenomeni precedentemente studiati. In queste ricerche un importante aiuto è dato spesso dai procedimenti grafici.

Una volta risoluti i due problemi sopra enunciati si tratta di giudicare se la rappresentazione ottenuta soddisfa sufficientemente bene allo scopo che da essa ci si proponeva, ossia di valutare il così detto grado di adattamento della formula al fenomeno osservato. Ciò si fa calcolando una opportuna funzione degli scarti tra i valori osservati e quelli calcolati, funzione che, il più delle volte, è la somma dei quadrati degli scarti stessi. Se il valore numerico di detta funzione è sufficientemente piccolo, l'espressione dedotta è soddisfacente; altrimenti occorre cambiarne la forma o aumentare il numero dei parametri. Queste difficoltà si presentano quando il fenomeno in studio è piuttosto complicato; e, d'altra parte, mentre è evidente che, con l'impiego di funzioni semplici come quelle sopra ricordate, non si possono ottenere curve complicate se non adoperando un grande numero di parametri, l'aumento di questo numero al di là di un certo valore è spesso vietato dalla natura del problema in esame, ed è sempre dannoso alla chiara comprensione del fenomeno, mentre implica un accrescimento antieconomico ed antipratico della mole dei computi.

L'amico prof. AMOROSO, che tanta parte della sua sapiente attività dedica a questo grandioso Istituto, mi ha proposto di esaminare se e quale vantaggio potrebbe ottenersi in questi casi sostituendo alle funzioni elementari, generalmente adoperate per la interpolazione, delle funzioni trascendenti più complesse, come, per esempio, potrebbero essere le funzioni ellittiche o le funzioni Gamma. È, infatti, intuitivo che la maggior complicazione insita in queste funzioni deve consentire di ottenere con pochissimi parametri forme di curve che non si possono convenientemente rappresentare con le funzioni elementari se non impiegando molti parametri.

Non è possibile effettuare in proposito uno studio sistematico, nè è qui il caso di fare una esposizione completa dei diversi casi che si possono presentare. E quindi, al solo scopo di far vedere quali e quante forme diverse di curve è possibile ottenere da una di quelle trascendenti mediante la variazione di un solo parametro, nella trattazione odierna mi limiterò a qualche esempio relativo all'impiego della funzione Gamma (Γ).

LA FUNZIONE GAMMA. — La trascendente Γ è stata introdotta da EULERO, che ne ha dato le proprietà fondamentali, dimostrando la sua grande importanza analitica, specialmente nel calcolo delle serie e degli integrali definiti. Uno studio sistematico di essa ha effettuato LEGENDRE intorno all'inizio del secolo XIX, mentre GAUSS la riattaccava alla serie ipergeometrica, scoprendone altre notevoli proprietà. Alcuni tra i più valenti analisti del secolo scorso hanno proseguito lo studio, generalizzando le proprietà note e dimostrandone di nuove, per modo che oggi la teoria della funzione Γ si può ritenere sufficientemente completa e altrettanto bene conosciute ed utilizzate sono le sue applicazioni analitiche.

Riassumo qui brevemente le definizioni e le proprietà che serviranno a comprendere ciò che segue.

Definizioni:

di EULERO (1729)

$$\Gamma(x) = \int_{t=0}^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

di GAUSS (1812)

$$\Gamma(x) = \lim_{k \to \infty} \frac{k!\, k^x}{x(x+1)\cdots(x+k)} \qquad (k \text{ intero}).$$

Altre definizioni equivalenti alle precedenti sono state date da EULERO, WEIERSTRASS, ecc. Tutte possono rendersi valevoli per qualsiasi valore reale o complesso dell'argomento.

Proprietà:

[1] $$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$$

$$\Gamma(x)\cdot\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi x}.$$

La prima di queste formule consente di calcolare il valore di Γ corrispondente ad un argomento reale qualsiasi, quando siano noti i valori di Γ per x compreso tra due interi successivi, per esempio tra 1 e 2. La seconda riduce il calcolo delle funzioni Γ con argomento compreso tra 1/2 e 1 a quello delle stesse con argomento compreso tra 0 e 1/2. Altre formule dovute a GAUSS ecc. consentono di ridurre ulteriormente l'intervallo per il quale è necessario il calcolo diretto dei valori di Γ.

Per $x = n$ (intero), dalla equazione [1], applicata successivamente, si ha:

$$\Gamma(n+1) = n!\,,$$

e quindi la funzione Γ si può considerare come una formula interpolatrice per il fattoriale di un numero reale qualunque (per x nullo o negativo intero, si ha $\Gamma = \pm\infty$).

Sviluppi in serie:

Per $|x| < 1$ vale l'elegante sviluppo di EULERO:

$$\log_e \Gamma(x+1) = -\gamma x + \frac{1}{2} S_2 x^2 - \frac{1}{3} S_3 x^3 + \frac{1}{4} S_4 x^4 - \cdots,$$

dove

$$\gamma = \lim_{k \to \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} - \log_e k\right) = 0{,}5772\ 15665$$

è la costante di MASCHERONI–EULERO e in generale si ha:

$$S_p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \qquad (p = 2, 3, \cdots).$$

Di convergenza notevolmente più rapida del precedente è lo sviluppo dovuto a LEGENDRE:

$$[2] \qquad \log_e \Gamma(x+1) = \frac{1}{2}\left(\log_e \frac{\pi x}{\operatorname{sen} \pi x} - \log_e \frac{1+x}{1-x}\right) +$$

$$+ (1-\gamma) x + \frac{1 - S_3}{3} x^3 + \frac{1 - S_5}{5} x^5 + \cdots$$

valevole per $|x| < 2$.

Altri sviluppi interessanti sono stati ricavati da STIRLING, BINET, KUMMER, ecc.: ricorderò solo la serie di STIRLING, ben nota per l'uso che se ne fa nel calcolo approssimato dei fattoriali dei numeri interi positivi:

$$\log_e \Gamma(x) = \frac{1}{2} \log_e 2\pi +$$

$$+ \left(x - \frac{1}{2}\right) \log_e x - x + \sum_{1}^{\infty}{}_r (-1)^{r-1} \frac{B_r}{2r(2r-1)\, x^{2r-1}},$$

dove i numeri bernoulliani B_r sono legati alle serie S_{2r} dalla relazione generale:

$$B_r = \frac{2 \cdot (2r)!}{(2\pi)^{2r}} S_{2r} \qquad (r = 1, 2, \cdots).$$

Questa serie semi-convergente conviene per valori abbastanza grandi di x.

Derivate della funzione $\Gamma(x)$.

Hanno molta importanza la derivata logaritmica di Γ, che si indica generalmente col simbolo Ψ, e la derivata prima Γ', cioè le funzioni:

$$\Psi(x) = \frac{d}{dx} \log_e \Gamma(x) \quad , \quad \Gamma'(x) = \frac{d}{dx} \Gamma(x) = \Gamma(x) \cdot \Psi(x).$$

Si vede che il calcolo numerico di Γ' si riduce a quello di Ψ. Per quest'ultima funzione valgono sviluppi in serie interessanti e utili, che si ricavano anche dagli sviluppi dati sopra per il logaritmo di Γ. Inoltre, si hanno le proprietà:

[3]
$$\Psi(x+1) = \Psi(x) - \frac{1}{x}$$
$$\Psi(1-x) = \Psi(x) + \pi \cot \pi x ,$$

che riducono l'ampiezza dell'intervallo in cui è necessario effettuare il calcolo diretto.

La funzione Beta (B):

Alla funzione Γ (integrale euleriano di 2ª specie) è legato l'integrale euleriano di 1ª specie, funzione di due variabili, che si indica col nome Beta. E precisamente si ha:

[4]
$$B(x, \alpha) = \frac{\Gamma(x) \cdot \Gamma(\alpha)}{\Gamma(x+\alpha)}.$$

Tavole numeriche:

Servendosi dello sviluppo [2] ed appoggiandosi alle proprietà che consentono di ridurre ad una frazione dell'unità l'intervallo in cui è necessario eseguire il calcolo diretto dei valori di Γ, LEGENDRE ha calcolato, pubblicandola nel suo « Traité des intégrales Eulériennes », una tavola contenente i valori con 12 decimali del logaritmo volgare di Γ da $x = 1{,}000$ a $x = 2{,}000$, con l'intervallo di 0,001 nell'argomento. Nella tavola sono registrate anche le differenze dei primi tre ordini, che servono per effettuare le interpolazioni.

Nella poderosa opera *Sieben–und mehrstellige Tafeln der Kreis– und Hyperbelfunktionen und deren Produkte, sowie der Gamma-funktion* di K. HAYASHI (Springer, Berlin, 1926) oltre ai logaritmi decimali di Γ per x compreso tra 0 e 3, con numero di cifre decimali variabile tra 8 e 13, son dati anche i valori naturali di Γ con 8 cifre decimali, con intervallo di 0,01 per x compreso $-5{,}00$ e $+1{,}00$ e tra $+2{,}00$ e $+5{,}00$, e con intervallo di 0,001 per x compreso tra $+1{,}000$ e $+2{,}000$. Queste tavole possono ritenersi fondamentali, per quanto contengano alcune sviste facilmente emendabili in una seconda edizione (1), tuttavia la mancanza delle differenze le rende poco pratiche quando occorre cercare un valore corrispondente ad un argomento che non figura nelle tavole stesse. Altro difetto è la mancanza di un segno che indichi in quali dei valori che terminano con la cifra 5 questa è stata ottenuta *forzando* un 4.

(1) Dal confronto con i valori da me calcolati per costruire la tavola I, ho riscontrato i seguenti errori di stampa:

Γ (1,257) deve avere il valore 0,90498 695
Γ (1,444) deve avere il valore 0,88573 714
Γ (1,600) deve avere il valore 0,89351 535
Γ (1,602) deve avere il valore 0,89374 216
Γ (1,606) deve avere il valore 0,89420 515
Γ (1,607) deve avere il valore 0,89432 285
Γ (1,650) deve avere il valore 0,90088 301

Nella convinzione che oggi, dato l'impiego sempre più diffuso delle macchine calcolatrici, sia conveniente possedere una tavola dei valori naturali della funzione Γ, oltre quella dei suoi logaritmi, e tenuti presenti gli inconvenienti sopra lamentati per la tavola Hayashi, ho dedotto dalla ricordata tavola di Legendre l'allegata tavola I, che contiene i valori naturali della funzione, con 7 cifre decimali, per gli argomenti da 1,000 a 2,050 con intervallo di 0,001.

Per l'impiego di questa tavola al calcolo dei valori di Γ, corrispondenti ad argomenti compresi tra due successivi di quelli in essa considerati, si sono riportate a fianco di ciascun valore Γ_i di Γ le medie aritmetiche Δ_{mi} delle differenze prime precedente (Δ_{i-1}) e successiva (Δ_i), mentre, data la loro lenta variabilità, si sono segnati soltanto al piede di ogni colonna i valori medi $\frac{1}{2}\Delta^2$ delle semi-differenze seconde per la colonna stessa. Questa disposizione è fatta in vista dell'impiego della formula di interpolazione di Stirling, che nel nostro caso si scrive semplicemente:

$$\Gamma(x) = \Gamma(x_i + \varepsilon\,\delta) = \Gamma(x_i) + \varepsilon\,\Delta_{mi} + \varepsilon^2\left(\frac{1}{2}\Delta^2\right),$$

dove $\delta = 0{,}001$, mentre si può sempre scegliere l'indice i in modo che il valore aritmetico di ε non superi 0,5. Il calcolo è così ridotto estremamente semplice, mentre l'errore nel valore di Γ non supera mai una unità della settima cifra decimale. Per esempio, per $x = 1{,}0035$, si ha $x_i = 1{,}003$, $\Gamma(x_i) = 0{,}998\ 2772$, $\Delta_{mi} = -\,5713$, $\frac{1}{2}\Delta^2 = +\,9$, e, siccome $\varepsilon = +\,0{,}5$, si ottiene:

$$\Gamma(1{,}0035) = 0{,}998\,2772 - 2856_5 + 2_2 = 0{,}997\,9918.$$

Lo stesso valore si otterrebbe assumendo $x_i = 1{,}004$ e $\varepsilon = -\,0{,}5$.

Dalla tavola I si possono calcolare facilmente i valori di Γ, per qualsiasi argomento reale, con sette cifre significative e con errore massimo di una unità nell'ultima cifra di destra. Io mi accontento di riunire nella tavola II i valori di Γ per argomento compreso tra 0 e 10,9, con intervallo di 0,1, e con sole 5 cifre significative, approssimazione sufficiente in quasi tutti i casi che interessano il nostro scopo, anzi spesso esuberante. Questi valori e i loro reciproci hanno servito per la costruzione della figura 1, sulla quale si è segnato, in particolare, il punto di ascissa $x = 1{,}461\,6321$, cui corrisponde il valor minimo di $\Gamma(x)$, uguale a 0,885 6032, e il massimo di $1/\Gamma$ eguale a 1,129 1739. Per brevità, non riporto le tavole dei valori della funzione $1/\Gamma$, per la quale ricordo solamente che esistono interessanti sviluppi in serie di potenze.

Una tavola dei valori di $\Psi(x)$ con 20 cifre decimali è stata calcolata da GAUSS, per x compresa tra 1 e 2, con intervallo di 0,01 (in corrispondenza, GAUSS dà anche i valori del logaritmo volgare di $\Gamma(x)$ con 20 decimali). Da questa tavola ho ricavato l'allegata tavola III, dove, oltre ai valori di Ψ con 7 cifre decimali, sono date le loro differenze fino al terzo ordine, in modo analogo a quanto si è fatto nella tavola I. La formula di interpolazione in questo caso risulta:

$$\Psi(x) = \Psi(x_i + \varepsilon\delta) = \Psi(x_i) + \varepsilon\Delta_{mi} + \varepsilon^2\left(\frac{1}{2}\Delta_i^2\right) - \varepsilon(1-\varepsilon^2)\left(\frac{1}{6}\Delta_{mi}^3\right),$$

essendo $\delta = 0{,}01$.

Ricorrendo alla proprietà [3], ho poi costruito la tavola IV, che dà i valori di Ψ con 4 decimali, per x compreso tra 0 e 10,9, con intervallo di 0,1.

CURVE CHE SI POSSONO COSTRUIRE INTRODUCENDO UN PARAMETRO VARIABILE. — Per limitarmi ai casi più elementari, considero, come ho già detto, le più semplici curve che si possono ottenere dalla funzione Γ mediante la introduzione di un solo parametro variabile reale e positivo α.

Queste curve, rappresentate nelle figure seguenti per alcuni valori del parametro, corrispondono alle funzioni:

$$D(x\,,\,\alpha) = \Gamma(x+\alpha) - \Gamma(x) \qquad \text{(fig. 2)}$$

$$\Delta(x\,,\,\alpha) = \frac{\Gamma(x+\alpha)}{\Gamma(x)} \qquad \text{(fig. 3)}$$

$$\nabla(x\,,\,\alpha)=\frac{1}{\Delta(x\,,\,\alpha)}=\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\alpha)} \qquad \text{(fig. 4)}$$

$$\Gamma(\alpha x) \qquad \text{(fig. 5)}$$

$$D_1(x\,,\,\alpha)=\Gamma(\alpha x)-\Gamma(x) \qquad \text{(fig. 6)}$$

$$\Delta_1(x\,,\,\alpha)=\frac{\Gamma(\alpha x)}{\Gamma(x)} \qquad \text{(fig. 7).}$$

Uno sguardo alle figure è sufficiente per riconoscere la varietà di forme ottenuta nelle curve e le modificazioni notevoli che, nello stesso tipo di curva, sono determinate dalla variazione del parametro. Aggiungo poche osservazioni, per mettere in rilievo qualche dettaglio.

La funzione D dà origine a curve analoghe alle parabole del 3º ordine, ma disimmetriche.

La funzione Δ dà origine a curve che rivolgono la concavità all'asse delle ascisse quando $\alpha < 1$, mentre la rivolgono a quello delle ordinate per $\alpha > 1$. Quando $\alpha = n$ è intero, la funzione Δ si riduce ad un polinomio di grado n in x e la curva corrispondente è una parabola di ordine n. Per valori non interi di α, si hanno curve che si possono considerare come generalizzazioni dell'interpolazione parabolica. Per piccoli valori di α la curva è costituita da un tratto che parte dall'origine e sale fin presso il punto di ordinata 1, mantenendosi molto vicino all'asse delle ordinate; poi piega bruscamente con angolo di poco superiore ad un retto e prosegue indefinitamente, con inclinazione sull'asse delle ascisse tanto meno sensibile quanto più piccolo è α.

La funzione ∇ conduce, invece, a curve di aspetto iperbolico, e, per $\alpha = 1$, dà proprio l'iperbole equilatera. Però non si arriva a rappresentazioni della forma $y = cx^{-k}$ se non per α prossimo all'unità, per modo che le curve qui considerate sono ben distinte e più generali delle ordinarie curve iperboliche. Quando α è piuttosto piccolo la curva risulta costituita da due rami quasi rettilinei e quasi ortogonali, raccordati presso il punto di coordinate

(0,1): sulla figura 4 ciò si vede per il caso di $\alpha = 0{,}01$. La funzione ∇ è poi legata all'integrale di prima specie B dalla relazione:

$$\nabla(x\,,\,\alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \mathrm{B}(x\,,\,\alpha)\,,$$

che si ricava immediatamente dalla definizione [4]. Come è naturale, una relazione analoga vale per la funzione Δ, che non è altro se non la reciproca di ∇; ed è superfluo osservare che non sarebbe necessario introdurre due funzioni distinte Δ e ∇ se si ammettesse che il parametro potesse assumere anche valori negativi, ciò che qui ho escluso per semplicità e maggior chiarezza.

Le curve corrispondenti alla funzione $\Gamma(\alpha x)$ hanno l'aspetto di parabole asimmetriche.

Le curve dedotte dalla funzione D_1, pur essendo in parte analoghe a quelle che discendono dalla D, ne differiscono e notevolmente; basta, per convincersene, osservare l'andamento del tutto diverso che si ha per valori $\alpha < 1$ e per valori $\alpha > 1$.

Un'osservazione analoga può farsi per le curve ricavate dalla funzione Δ_1.

Non si esauriscono qui le possibilità con l'impiego di un solo parametro, mentre enorme è il numero di curve che si possono costruire con due parametri, sia utilizzando le sole funzioni Γ, sia accoppiandole con le funzioni elementari (potenze, esponenziali, funzioni circolari, ecc.).

Determinazione del valore del parametro. — Anche nei casi studiati, come sempre si verifica appena si esce dai problemi di interpolazione più semplici e consuetudinari, la difficoltà maggiore consiste nello stabilire il tipo di rappresentazione adatto per la questione che si studia. A questo scopo servono, come sopra si è detto, le analogie e le rappresentazioni grafiche.

Una volta stabilita la forma, il grafico dà un valore grossolanamente approssimato del parametro. Per avvicinarlo ulteriormente, conviene ridurre lineari le equazioni. Per questo, supponendo che l'incremento η, che condurrà al valore più conveniente di α, sia abbastanza piccolo perchè se ne possa trascurare il quadrato, si hanno le formule:

$$D(x, \alpha + \eta) = D(x, \alpha) + \eta\Gamma'(x + \alpha),$$

$$\Delta(x, \alpha + \eta) = \Delta(x, \alpha)\{1 + \eta\Psi'(x + \alpha)\},$$

e analoghe.

Sono così giunto al termine della sommaria esposizione che mi ero proposto di fare, più che altro per destare un poco di interesse intorno al problema cui ho accennato, il quale meriterebbe di venire studiato a fondo, scendendo ai procedimenti pratici e costruendo le tavole numeriche e i grafici opportuni, e non per la sola funzione Gamma, ma anche per altre trascendenti.

E poichè ho accennato alle tavole numeriche dei valori delle funzioni trascendenti, mi sia concesso di sostenerne qui la grandissima importanza ed utilità. Già un notevole lavoro sarebbe di raccogliere e coordinare le numerosissime tavole sparse in varie pubblicazioni, spesso ignote od introvabili, ma questo non dovrebbe essere che il primo passo verso la edizione organica di tavole il più possibile complete, alle quali tutti potessero attingere con sicurezza e facilità. Come ho già detto altrove (1), quest'opera trascende le forze di un individuo o di una Casa editrice: essa dovrebbe, quindi, essere promossa ed attuata da un Istituto avente grandi mezzi o da un Ente appositamente costituito in uno Stato il cui Governo intuisse l'importanza dell'opera stessa. Sarà riservato all'Italia l'onore di questa pubblicazione?

(1) *Calcoli numerici, grafici e meccanici* – Pisa, 1928.

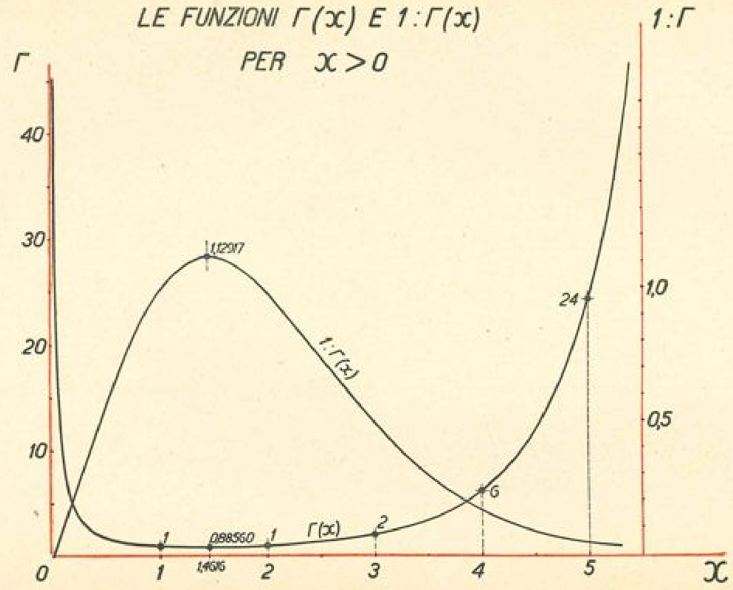

LE FUNZIONI Γ(x) E 1:Γ(x)
PER x > 0
Γ
1:Γ
40
30
20
10
0
1,0
0,5
1,12917
1:Γ(x)
Γ(x)
0,88560
1,4616
24
6
1
2
3
4
5
x

Fig. 1.

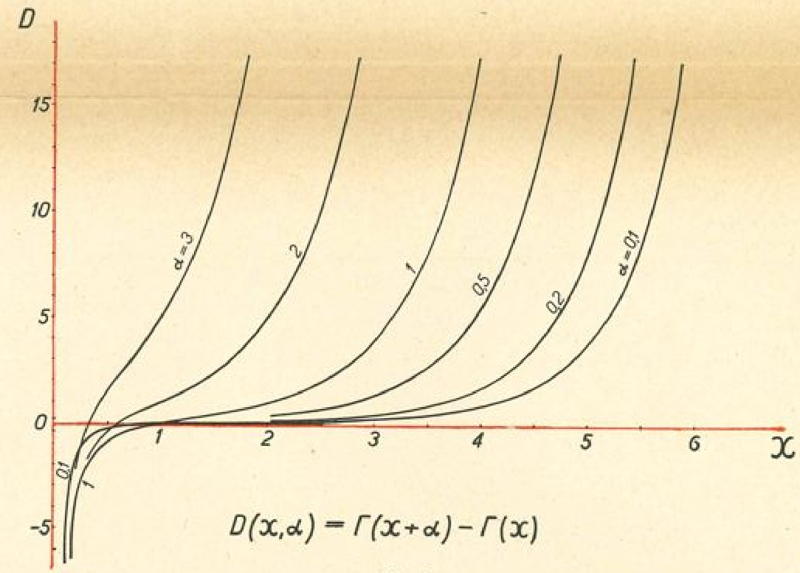

D
15
10
5
0
-5
α = 3
2
1
0,5
0,2
α = 0,1
0,1
1
2
3
4
5
6
x
D(x, α) = Γ(x + α) − Γ(x)

Fig. 2.

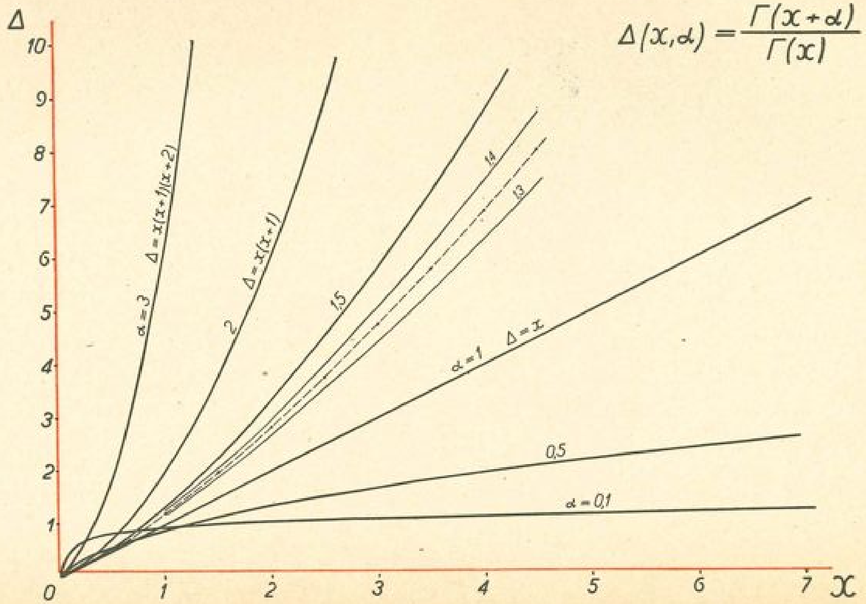

$\Delta(x,\alpha) = \dfrac{\Gamma(x+\alpha)}{\Gamma(x)}$
Δ
x
$\alpha = 3$ $\Delta = x(x+1)(x+2)$
2 $\Delta = x(x+1)$
1,5
1,4
1,3
$\alpha = 1$ $\Delta = x$
0,5
$\alpha = 0,1$

Fig. 3.

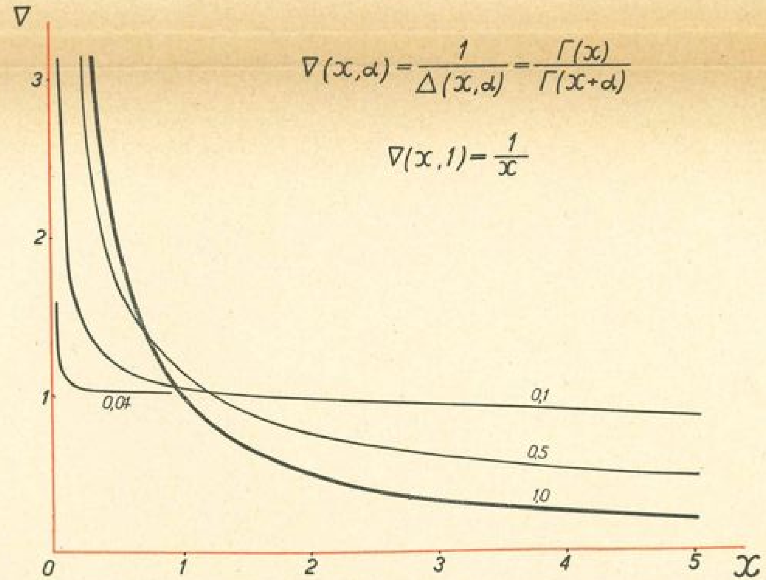

$\nabla(x,\alpha) = \dfrac{1}{\Delta(x,\alpha)} = \dfrac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\alpha)}$
$\nabla(x,1) = \dfrac{1}{x}$
∇
x
0,01
0,1
0,5
1,0

Fig. 4.

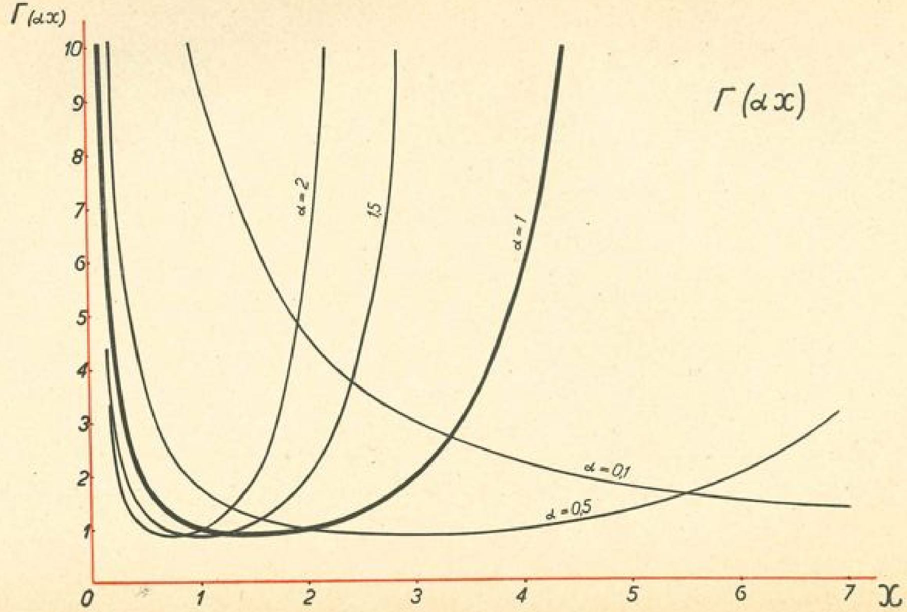


Fig. 5.

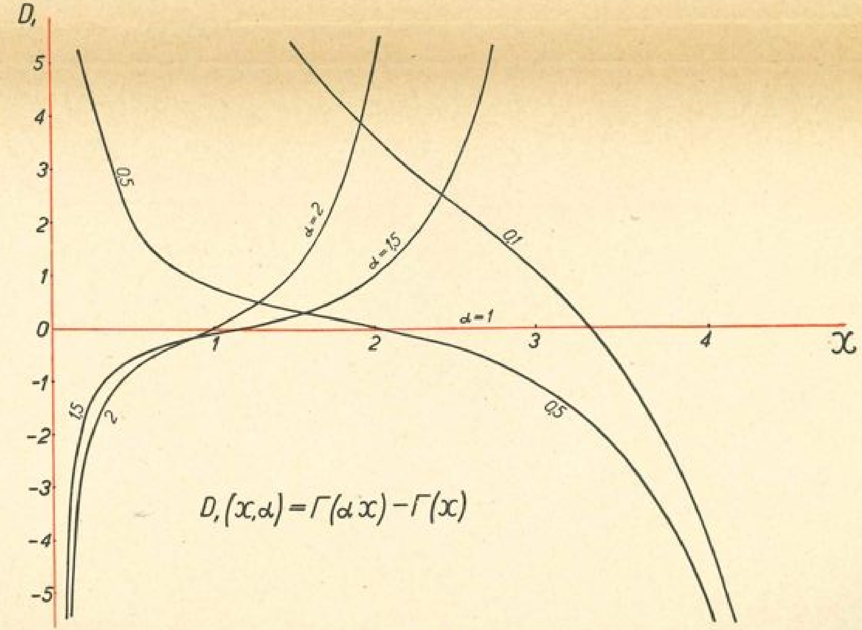
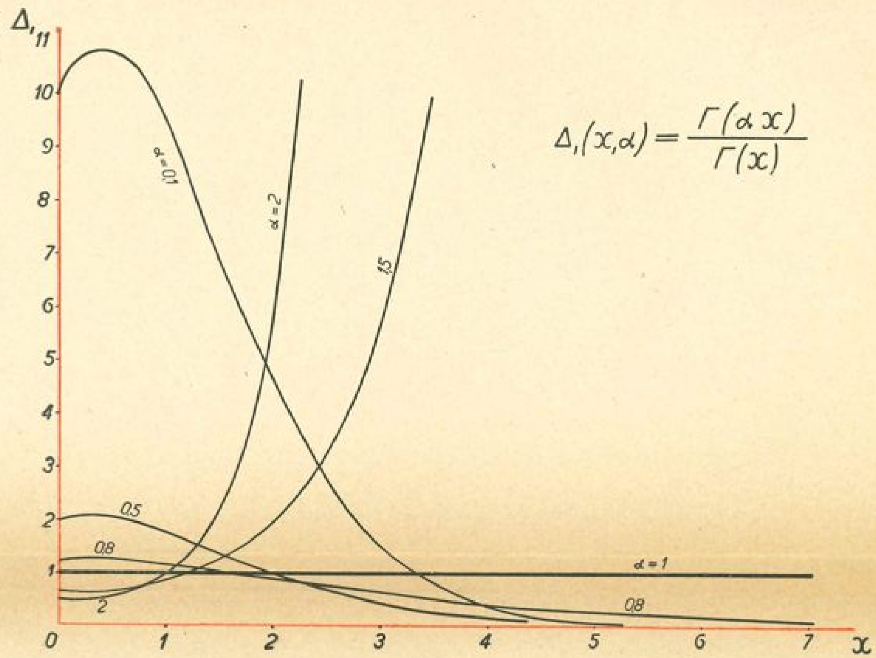


Fig. 6.



Δ_1
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
1
2
3
4
5
6
7
x
$\alpha=0{,}1$
$\alpha=2$
1,5
0,5
0,8
2
$\alpha=1$
0,8
$\Delta_1(x,\alpha)=\frac{\Gamma(\alpha x)}{\Gamma(x)}$

Fig. 7.

TAVOLA I.

Valori della funzione $\Gamma(x)$

con 7 decimali, per x compreso tra 1,000 e 2,050.

x	$\Gamma(x)$	Δ_m	x	$\Gamma(x)$	Δ_m	x	$\Gamma(x)$	Δ_m
1,000	1,000 0000	—5772	1,050	0,973 5043	—4846	1,100	0,951 3508	—4031
,001	0,999 4238	5752	,051	973 020$\bar{5}$	4829	,101	950 9484	4016
,002	998 8495	5733	,052	972 5384	4812	,102	950 5476	4001
,003	998 2772	5713	,053	972 0581	4794	,103	950 1482	3986
,004	997 7069	5693	,054	971 579$\bar{5}$	4777	,104	949 7504	3970
1,005	0,997 1385	—5674	1,055	0,971 1026	—4760	1,105	0,949 3542	—3955
,006	996 5721	5654	,056	970 6274	4743	,106	948 9594	3940
,007	996 0076	5635	,057	970 1539	4726	,107	948 5662	3924
,008	995 4451	5615	,058	969 6821	4709	,108	948 174$\bar{5}$	3910
,009	994 8845	5596	,059	969 2120	4692	,109	947 7842	3894
1,010	0,994 3259	—5577	1,060	0,968 7436	—4675	1,110	0,947 3956	—3879
,011	993 7691	5558	,061	968 2770	4658	,111	947 0083	3865
,012	993 2143	5538	,062	967 8119	4642	,112	946 6226	3850
,013	992 6614	5519	,063	967 3486	4624	,113	946 2383	3835
,014	992 1104	5500	,064	966 8870	4608	,114	945 8556	3820
1,015	0,991 5613	—5481	1,065	0,966 4270	—4591	1,115	0,945 4743	—3805
,016	991 0141	5462	,066	965 9687	4575	,116	945 0945	3790
,017	990 4688	5443	,067	965 5120	4558	,117	944 7162	3775
,018	989 9254	5424	,068	965 0570	4541	,118	944 3394	3760
,019	989 3839	5406	,069	964 6037	4525	,119	943 9641	3746
1,020	0,988 8442	—5387	1,070	0,964 1520	—4508	1,120	0,943 5902	—3731
,021	988 3064	5368	,071	963 7020	4492	,121	943 2178	3717
,022	987 7705	5349	,072	963 2536	4475	,122	942 8468	3702
,023	987 236$\bar{5}$	5331	,073	962 8069	4459	,123	942 4773	3687
,024	986 7043	5312	,074	962 3618	4443	,124	942 1093	3673
1,025	0,986 1740	—5294	1,075	0,961 9183	—4426	1,125	0,941 7427	—3658
,026	985 645$\bar{5}$	5276	,076	961 4765	4410	,126	941 3776	3644
,027	985 1188	5257	,077	961 0363	4394	,127	941 0139	3630
,028	984 5940	5238	,078	960 5977	4378	,128	940 6516	3615
,029	984 0711	5220	,079	960 1607	4362	,129	940 2908	3601
1,030	0,983 5500	—5202	1,080	0,959 7253	—4345	1,130	0,939 9314	—3586
,031	983 0306	5184	,081	959 2916	4330	,131	939 5735	3572
,032	982 5132	5165	,082	958 8594	4314	,132	939 2170	3558
,033	981 997$\bar{5}$	5148	,083	958 4288	4297	,133	938 8619	3543
,034	981 4836	5129	,084	957 9999	4281	,134	938 5083	3529
1,035	0,980 9716	—5111	1,085	0,957 5725	—4266	1,135	0,938 1560	—3515
,036	980 4613	5094	,086	957 1468	4249	,136	937 8052	3501
,037	979 9528	5075	,087	956 7226	4234	,137	937 4558	3487
,038	979 4462	5057	,088	956 3000	4218	,138	937 1078	3473
,039	978 9413	5040	,089	955 8789	4202	,139	936 7612	3458
1,040	0,978 4382	—5022	1,090	0,955 459$\bar{5}$	—4186	1,140	0,936 4161	—3444
,041	977 9369	5004	,091	955 0416	4171	,141	936 0723	3431
,042	977 4373	4986	,092	954 6253	4155	,142	935 7299	3417
,043	976 9396	4969	,093	954 2105	4139	,143	935 3889	3402
,044	976 4435	4951	,094	953 7974	4124	,144	935 0494	3388
1,045	0,975 9493	—4933	1,095	0,953 3857	—4109	1,145	0,934 7112	—3375
,046	975 4568	4916	,096	952 9756	4093	,146	934 3743	3361
,047	974 9660	4899	,097	952 5671	4077	,147	934 0389	3347
,048	974 4770	4881	,098	952 1601	4062	,148	933 7049	3333
,049	973 9898	4863	,099	951 7547	4046	,149	933 3722	3320
1,050	0,973 5043	—4846	1,100	0,951 3508	—4031	1,150	0,933 0409	—3306
	$\frac{1}{2}\Delta^2 = +9$			$+8$			$+7$	

x	$\Gamma(x)$	Δ_m	x	$\Gamma(x)$	Δ_m	x	$\Gamma(x)$	Δ_m
1,150	0,933 0409	—3306	1,200	0,918 1687	—2654	1,250	0,906 402$\bar{5}$	—2061
,151	932 7110	3292	,201	917 9040	2641	,251	906 1969	2050
,152	932 382$\bar{5}$	3278	,202	917 6404	2629	,252	905 9924	2039
,153	932 0553	3265	,203	917 3782	2616	,253	905 7891	2027
,154	931 729$\bar{5}$	3251	,204	917 1171	2604	,254	905 5869	2016
1,155	0,931 4050	—3238	1,205	0,916 8573	—2592	1,255	0,905 3858	—2005
,156	931 0819	3224	,206	916 5987	2580	,256	905 1858	1994
,157	930 7602	3210	,207	916 3413	2568	,257	904 9870	1983
,158	930 4398	3197	,208	916 0851	2555	,258	904 7892	1972
,159	930 1208	3183	,209	915 8302	2543	,259	904 5926	1960
1,160	0,929 8031	—3170	1,210	0,915 576$\bar{5}$	—2531	1,260	0,904 3971	—1949
,161	929 4867	3157	,211	915 3240	2519	,261	904 2027	1938
,162	929 1717	3143	,212	915 0727	2506	,262	904 009$\bar{5}$	1927
,163	928 8580	3130	,213	914 8227	2494	,263	903 8173	1916
,164	928 5457	3116	,214	914 5738	2483	,264	903 6262	1905
1,165	0,928 2347	—3103	1,215	0,914 3261	—2470	1,265	0,903 4363	—1894
,166	927 9250	3090	,216	914 0797	2458	,266	903 2474	1883
,167	927 6167	3076	,217	913 834$\bar{5}$	2446	,267	903 0597	1871
,168	927 3097	3063	,218	913 5904	2434	,268	902 8731	1861
,169	927 0040	3050	,219	913 3476	2422	,269	902 6875	1850
1,170	0,926 6996	—3037	1,220	0,913 1059	—2410	1,270	0,902 5031	—1839
,171	926 3966	3024	,221	912 865$\bar{5}$	2398	,271	902 3197	1828
,172	926 0948	3011	,222	912 6262	2386	,272	902 1374	1817
,173	925 7944	2998	,223	912 3882	2374	,273	901 9563	1806
,174	925 4952	2985	,224	912 1513	2362	,274	901 7762	1795
1,175	0,925 1974	—2971	1,225	0,911 9156	—2350	1,275	0,901 5972	—1784
,176	924 9009	2958	,226	911 6811	2339	,276	901 4193	1773
,177	924 6057	2945	,227	911 4478	2327	,277	901 242$\bar{5}$	1763
,178	924 3118	2933	,228	911 2156	2315	,278	901 0667	1752
,179	924 0191	2920	,229	910 9847	2303	,279	900 8921	1741
1,180	0,923 7278	—2906	1,230	0,910 7549	—2292	1,280	0,900 718$\bar{5}$	—1730
,181	923 4378	2894	,231	910 5262	2280	,281	900 5460	1720
,182	923 1490	2881	,232	910 2988	2268	,282	900 3745	1709
,183	922 8616	2868	,233	910 072$\bar{5}$	2257	,283	900 2042	1698
,184	922 5754	2855	,234	909 8474	2245	,284	900 0349	1687
1,185	0,922 290$\bar{5}$	—2843	1,235	0,909 6234	—2234	1,285	0,899 8667	—1677
,186	922 0068	2830	,236	909 4006	2222	,286	899 6995	1666
,187	921 724$\bar{5}$	2817	,237	909 1790	2210	,287	899 5334	1655
,188	921 4434	2804	,238	908 9585	2199	,288	899 3684	1644
,189	921 1636	2792	,239	908 7392	2187	,289	899 204$\bar{5}$	1634
1,190	0,920 8850	—2779	1,240	0,908 5211	—2176	1,290	0,899 0416	—1623
,191	920 6078	2766	,241	908 3040	2164	,291	898 8798	1613
,192	920 3317	2754	,242	908 0882	2152	,292	898 7190	1602
,193	920 0570	2741	,243	907 873$\bar{5}$	2141	,293	898 5593	1592
,194	919 783$\bar{5}$	2729	,244	907 6599	2130	,294	898 4006	1581
1,195	0,919 5112	—2716	1,245	0,907 447$\bar{5}$	—2118	1,295	0,898 2430	—1571
,196	919 2402	2703	,246	907 2362	2106	,296	898 0864	1560
,197	918 970$\bar{5}$	2691	,247	907 0261	2095	,297	897 9309	1549
,198	918 7020	2678	,248	906 8171	2084	,298	897 776$\bar{5}$	1539
,199	918 4348	2666	,249	906 6092	2073	,299	897 6231	1529
1,200	0,918 1687	—2654	1,250	0,906 402$\bar{5}$	—2061	1,300	0,897 4707	—1518
	$\frac{1}{2}\Delta^2 = +7$			$+6$			$+5$	

x	$\Gamma(x)$	Δ_m	x	$\Gamma(x)$	Δ_m	x	$\Gamma(x)$	Δ_m
1,300	0,897 4707	−1518	1,350	0,891 1514	−1015	1,400	0,887 2638	− 544
,301	897 3194	1508	,351	891 0504	1005	,401	887 2098	535
,302	897 1691	1497	,352	890 9503	996	,402	887 1567	526
,303	897 0199	1487	,353	890 8512	986	,403	887 1045	517
,304	896 8717	1477	,354	890 7531	976	,404	887 0533	508
1,305	0,896 724$\bar{5}$	−1466	1,355	0,890 6559	− 967	1,405	0,887 0029	− 499
,306	896 5784	1456	,356	890 5597	957	,406	886 9534	490
,307	896 4333	1446	,357	890 464$\bar{5}$	947	,407	886 9049	481
,308	896 2892	1435	,358	890 3702	938	,408	886 8572	472
,309	896 1462	1425	,359	890 2769	928	,409	886 810$\bar{5}$	462
1,310	0,896 0042	−1415	1,360	0,890 1845	− 919	1,410	0,886 7647	− 454
,311	895 8632	1404	,361	890 0931	909	,411	886 7197	445
,312	895 7233	1394	,362	890 0027	899	,412	886 6757	435
,313	895 5843	1384	,363	889 9132	890	,413	886 6326	427
,314	895 4464	1374	,364	889 8247	880	,414	886 5903	418
1,315	0,895 3096	−1363	1,365	0,889 7371	− 871	1,415	0,886 5490	− 408
,316	895 1737	1353	,366	889 650$\bar{5}$	861	,416	886 5086	400
,317	895 0389	1343	,367	889 5648	852	,417	886 4690	391
,318	894 9051	1333	,368	889 4801	842	,418	886 4304	382
,319	894 7723	1323	,369	889 3963	833	,419	886 3926	373
1,320	0,894 640$\bar{5}$	−1313	1,370	0,889 3135	−823	1,420	0,886 3558	− 364
,321	894 5097	1303	,371	889 2316	814	,421	886 3198	355
,322	894 3799	1292	,372	889 1507	804	,422	886 2848	346
,323	894 2512	1282	,373	889 0707	795	,423	886 2506	337
,324	894 1234	1272	,374	888 9917	785	,424	886 2173	328
1,325	0,893 9967	−1262	1,375	0,888 9136	− 776	1,425	0,886 1849	− 319
,326	893 8710	1252	,376	888 8364	767	,426	886 1534	310
,327	893 7462	1242	,377	888 7602	757	,427	886 1228	302
,328	893 6225	1232	,378	888 6849	748	,428	886 0930	293
,329	893 4998	1222	,379	888 6106	739	,429	886 0642	284
1,330	0,893 3781	−1212	1,380	0,888 5371	− 729	1,430	0,886 0362	− 275
,331	893 2573	1202	,381	888 4647	720	,431	886 0092	266
,332	893 1376	1192	,382	888 3931	711	,432	885 9830	258
,333	893 0189	1182	,383	888 3225	701	,433	885 9576	249
,334	892 9011	1172	,384	888 2528	692	,434	885 9332	239
1,335	0,892 7844	−1162	1,385	0,888 1841	− 682	1,435	0,885 9097	− 231
,336	892 6686	1152	,386	888 1163	673	,436	885 8870	222
,337	892 5539	1142	,387	888 0494	664	,437	885 8652	213
,338	892 4401	1133	,388	887 9834	655	,438	885 8443	205
,339	892 3273	1123	,389	887 9184	645	,439	885 8242	196
1,340	0,892 2155	−1113	1,390	0,887 8543	− 636	1,440	0,885 8051	− 187
,341	892 1047	1103	,391	887 7911	627	,441	885 7868	178
,342	891 9949	1093	,392	887 7288	618	,442	885 7694	170
,343	891 8860	1084	,393	887 667$\bar{5}$	608	,443	885 7528	161
,344	891 7781	1074	,394	887 6071	599	,444	885 7371	152
1,345	0,891 6712	−1064	1,395	0,887 5476	− 590	1,445	0,885 7223	− 143
,346	891 5653	1054	,396	887 4890	581	,446	885 7084	134
,347	891 4604	1044	,397	887 4313	572	,447	885 6954	126
,348	891 3564	1034	,398	887 3746	563	,448	885 6832	118
,349	891 253$\bar{5}$	1025	,399	887 3187	554	,449	885 6718	109
1,350	0,891 1514	−1015	1,400	0,887 2638	− 544	1,450	0,885 6614	− 100
	$\frac{1}{2}\Delta^2 = +5$			$+5$			$+4$	

x	$\Gamma(x)$	Δ_m	x	$\Gamma(x)$	Δ_m	x	$\Gamma(x)$	Δ_m
1,450	0,885 6614	— 100	1,500	0,886 2269	+ 324	1,550	0,888 8683	+ 731
,451	885 6518	91	,501	886 2597	332	,551	888 9418	739
,452	885 6431	83	,502	886 2933	340	,552	889 0161	747
,453	885 6352	74	,503	886 3277	348	,553	889 0912	755
,454	885 6282	65	,504	886 3629	357	,554	889 1671	763
1,455	0,885 6221	— 57	1,505	0,886 3990	+ 365	1,555	0,889 2438	+ 771
,456	885 6168	48	,506	886 4359	373	,556	889 3213	779
,457	885 6124	39	,507	886 4736	381	,557	889 3996	787
,458	885 6089	31	,508	886 5121	390	,558	889 4786	795
,459	885 6062	23	,509	886 551$\bar{5}$	398	,559	889 5585	803
1,460	0,885 6043	— 14	1,510	0,886 5917	+ 406	1,560	0,889 6392	+ 811
,461	885 6034	— 5	,511	886 6327	414	,561	889 7207	818
,462	885 6033	+ 3	,512	886 6745	423	,562	889 8029	826
,463	885 6040	12	,513	886 7172	431	,563	889 8860	835
,464	885 6056	20	,514	886 7607	439	,564	889 9699	843
1,465	0,885 6080	+ 29	1,515	0,886 805$\bar{0}$	+ 447	1,565	0,890 0545	+ 851
,466	885 6114	37	,516	886 8501	455	,566	890 1400	859
,467	885 6155	46	,517	886 8960	464	,567	890 2262	867
,468	885 6205	55	,518	886 9428	472	,568	890 3133	875
,469	885 6264	63	,519	886 9904	480	,569	890 4011	882
1,470	0,885 6331	+ 72	1,520	0,887 0388	+ 488	1,570	0,890 4897	+ 891
,471	885 6407	80	,521	887 0880	496	,571	890 5792	899
,472	885 6491	89	,522	887 1380	505	,572	890 6694	906
,473	885 6584	97	,523	887 1889	513	,573	890 7604	914
,474	885 668$\bar{5}$	106	,524	887 2405	521	,574	890 8522	922
1,475	0,885 679$\bar{5}$	+ 114	1,525	0,887 2930	+ 529	1,575	0,890 9448	+ 929
,476	885 6913	122	,526	887 3463	537	,576	891 0381	937
,477	885 7039	131	,527	887 4004	545	,577	891 1323	946
,478	885 7174	140	,528	887 4553	554	,578	891 2273	954
,479	885 7318	148	,529	887 5111	562	,579	891 3230	962
1,480	0,885 7470	+ 156	1,530	0,887 5676	+ 570	1,580	0,891 4196	+ 970
,481	885 7630	165	,531	887 625$\bar{0}$	578	,581	891 5169	977
,482	885 7799	173	,532	887 6832	585	,582	891 615$\bar{0}$	985
,483	885 7976	182	,533	887 7421	593	,583	891 7139	993
,484	885 8162	190	,534	887 8019	602	,584	891 8136	1001
1,485	0,885 8356	+ 198	1,535	0,887 8625	+ 610	1,585	0,891 9141	+1009
,486	885 8558	207	,536	887 9239	619	,586	892 0153	1017
,487	885 8769	215	,537	887 9862	627	,587	892 1174	1025
,488	885 8988	223	,538	888 0492	634	,588	892 2202	1032
,489	885 9215	232	,539	888 1130	642	,589	892 3238	1040
1,490	0,885 9451	+ 241	1,540	0,888 1777	+ 650	1,590	0,892 4282	+1048
,491	885 9696	249	,541	888 2431	658	,591	892 5334	1056
,492	885 9948	257	,542	888 3094	667	,592	892 6394	1064
,493	886 0209	266	,543	888 3764	675	,593	892 7461	1072
,494	886 0479	274	,544	888 4443	683	,594	892 8537	1080
1,495	0,886 0756	+ 282	1,545	0,888 5130	+ 690	1,595	0,892 9620	+1087
,496	886 1042	290	,546	888 5824	698	,596	893 0711	1095
,497	886 1336	298	,547	888 6527	707	,597	893 1810	1103
,498	886 1639	307	,548	888 7238	715	,598	893 2917	1111
,499	886 1950	315	,549	888 7957	723	,599	893 4031	1118
1,500	0,886 2269	+324	1,550	0,888 8683	+ 731	1,600	0,893 5153	+1126
	$\frac{1}{2}\Delta^2 = +4$			$+4$			$+4$	

x	$\Gamma(x)$	Δ_m	x	$\Gamma(x)$	Δ_m	x	$\Gamma(x)$	Δ_m
1,600	0,893 5153	+1126	1,650	0,900 1168	+1513	1,700	0,908 6387	+1895
,601	893 6284	1134	,651	900 2685	1521	,701	908 8286	1903
,602	893 7422	1142	,652	900 4210	1529	,702	909 0192	1910
,603	893 8567	1150	,653	900 5742	1536	,703	909 2106	1918
,604	893 9721	1158	,654	900 7282	1544	,704	909 4028	1926
1,605	0,894 0882	+1166	1,655	0,900 8830	+1552	1,705	0,909 5957	+1933
,606	894 2052	1173	,656	901 0386	1560	,706	909 7894	1941
,607	894 3228	1180	,657	901 1949	1567	,707	909 9838	1948
,608	894 4413	1189	,658	901 3519	1575	,708	910 1790	1956
,609	894 5606	1196	,659	901 5098	1583	,709	910 375$\bar{0}$	1964
1,610	0,894 6806	+1204	1,660	0,901 6684	+1590	1,710	0,910 5717	+1971
,611	894 8014	1212	,661	901 8277	1598	,711	910 7692	1979
,612	894 9230	1220	,662	901 9879	1606	,712	910 9674	1986
,613	895 0454	1227	,663	902 1488	1613	,713	911 1664	1994
,614	895 1685	1235	,664	902 3104	1621	,714	911 3661	2001
1,615	0,895 2924	+1243	1,665	0,902 4729	+1629	1,715	0,911 5666	+2009
,616	895 4171	1251	,666	902 6361	1636	,716	911 7679	2017
,617	895 5426	1259	,667	902 8000	1644	,717	911 9699	2024
,618	895 6688	1266	,668	902 9648	1651	,718	912 1727	2032
,619	895 7959	1274	,669	903 1302	1658	,719	912 3763	2041
1,620	0,895 9237	+1282	1,670	0,903 296$\bar{5}$	+1666	1,720	0,912 5806	+2046
,621	896 0522	1290	,671	903 4635	1674	,721	912 7856	2054
,622	896 1816	1298	,672	903 6313	1682	,722	912 991$\bar{5}$	2062
,623	896 3117	1305	,673	903 7998	1689	,723	913 1980	2069
,624	896 4426	1313	,674	903 9692	1697	,724	913 4054	2078
1,625	0,896 5743	+1321	1,675	0,904 1392	+1704	1,725	0,913 613$\bar{5}$	+2084
,626	896 7067	1328	,676	904 3101	1713	,726	913 8223	2092
,627	896 8399	1336	,677	904 4817	1720	,727	914 0320	2100
,628	896 9739	1344	,678	904 6540	1727	,728	914 2423	2108
,629	897 1087	1352	,679	904 8271	1735	,729	914 453$\bar{5}$	2116
1,630	0,897 2442	+1359	1,680	0,905 0010	+1743	1,730	0,914 6654	+2123
,631	897 3805	1367	,681	905 1757	1751	,731	914 8780	2130
,632	897 5176	1375	,682	905 3511	1758	,732	915 0914	2138
,633	897 655$\bar{5}$	1383	,683	905 5273	1766	,733	915 3056	2146
,634	897 7941	1390	,684	905 7042	1773	,734	915 5205	2153
1,635	0,897 933$\bar{5}$	+1398	1,685	0,905 8819	+1781	1,735	0,915 7362	+2161
,636	898 0737	1406	,686	906 0604	1789	,736	915 9527	2169
,637	898 2146	1413	,687	906 2396	1796	,737	916 1699	2176
,638	898 3563	1421	,688	906 4196	1804	,738	916 3878	2183
,639	898 4988	1429	,689	906 6003	1811	,739	916 6065	2191
1,640	0,898 6420	+1436	1,690	0,906 7818	+1819	1,740	0,916 8260	+2199
,641	898 7860	1444	,691	906 9641	1827	,741	917 0463	2207
,642	898 9308	1452	,692	907 1471	1834	,742	917 2673	2214
,643	899 0764	1460	,693	907 3309	1842	,743	917 4890	2221
,644	899 2227	1467	,694	907 515$\bar{5}$	1850	,744	917 7115	2229
1,645	0,899 3698	+1475	1,695	0,907 7008	+1857	1,745	0,917 9348	+2237
,646	899 5177	1483	,696	907 8868	1865	,746	918 1588	2244
,647	899 6663	1490	,697	908 0737	1873	,747	918 3836	2252
,648	899 8157	1498	,698	908 2613	1880	,748	918 6092	2260
,649	899 9659	1506	,699	908 4496	1887	,749	918 835$\bar{5}$	2267
1,650	0,900 1168	+1513	1,700	0,908 6387	+1895	1,750	0,919 0625	+2274
	$\frac{1}{2}\Delta^2 = +4$			$+4$			$+4$	

x	$\Gamma(x)$	Δ_m	x	$\Gamma(x)$	Δ_m	x	$\Gamma(x)$	Δ_m
1,750	0,919 0625	+2274	1,800	0,931 3838	+2655	1,850	0,945 6112	+3038
,751	919 2903	2282	,801	931 6496	2662	,851	945 9153	3045
,752	919 5189	2290	,802	931 9162	2670	,852	946 2202	3053
,753	919 7483	2297	,803	932 1835	2677	,853	946 5258	3061
,754	919 9784	2305	,804	932 4516	2685	,854	946 8323	3069
1,755	0,920 2092	+2312	1,805	0,932 720$\bar{5}$	+2693	1,855	0,947 139$\bar{5}$	+3076
,756	920 4408	2320	,806	932 9901	2700	,856	947 4474	3084
,757	920 6732	2328	,807	933 2605	2708	,857	947 7562	3092
,758	920 9063	2335	,808	933 5317	2716	,858	948 0657	3099
,759	921 1402	2343	,809	933 8036	2723	,859	948 3760	3106
1,760	0,921 3749	+2351	1,810	0,934 0763	+2731	1,860	0,948 6870	+3115
,761	921 6103	2358	,811	934 3497	2738	,861	948 9989	3122
,762	921 846$\bar{5}$	2366	,812	934 6239	2746	,862	949 311$\bar{5}$	3130
,763	922 0834	2373	,813	934 8989	2754	,863	949 6249	3138
,764	922 3211	2381	,814	935 1746	2761	,864	949 9390	3145
1,765	0,922 5595	+2388	1,815	0,935 4511	+2769	1,865	0,950 2539	+3153
,766	922 7987	2396	,816	935 7284	2777	,866	950 5696	3161
,767	923 0387	2404	,817	936 0064	2784	,867	950 8861	3169
,768	923 2794	2411	,818	936 2852	2792	,868	951 2034	3177
,769	923 5209	2419	,819	936 5648	2800	,869	951 5214	3184
1,770	0,923 7631	+2426	1,820	0,936 8451	+2807	1,870	0,951 8402	+3192
,771	924 0061	2434	,821	937 1262	2815	,871	952 1598	3200
,772	924 2499	2442	,822	937 4080	2822	,872	952 4801	3207
,773	924 4944	2449	,823	937 6906	2830	,873	952 8012	3215
,774	924 7397	2457	,824	937 9740	2838	,874	953 1231	3223
1,775	0,924 9857	+2464	1,825	0,938 2582	+2846	1,875	0,953 4458	+3231
,776	925 2325	2472	,826	938 5431	2853	,876	953 7693	3239
,777	925 4801	2480	,827	938 8288	2861	,877	954 093$\bar{5}$	3246
,778	925 7284	2487	,828	939 1152	2868	,878	954 4185	3254
,779	925 977$\bar{5}$	2495	,829	939 4024	2876	,879	954 7443	3262
1,780	0,926 2273	+2502	1,830	0,939 6904	+2883	1,880	0,955 0709	+3270
,781	926 4779	2510	,831	939 9791	2892	,881	955 3982	3277
,782	926 7293	2518	,832	940 2687	2899	,882	955 7263	3285
,783	926 9814	2525	,833	940 5589	2907	,883	956 0552	3293
,784	927 2343	2533	,834	940 8500	2915	,884	956 3849	3300
1,785	0,927 4879	+2540	1,835	0,941 1418	+2922	1,885	0,956 7153	+3309
,786	927 7423	2548	,836	941 4344	2930	,886	957 0466	3316
,787	927 9974	2556	,837	941 7277	2937	,887	957 3786	3324
,788	928 2534	2564	,838	942 0218	2945	,888	957 7114	3332
,789	928 5100	2571	,839	942 3167	2953	,889	958 0450	3340
1,790	0,928 767$\bar{5}$	+2579	1,840	0,942 6124	+2961	1,890	0,958 3793	+3347
,791	929 0257	2586	,841	942 9088	2968	,891	958 7144	3355
,792	929 2847	2594	,842	943 2060	2976	,892	959 0504	3363
,793	929 5444	2601	,843	943 5039	2983	,893	959 3871	3370
,794	929 8049	2609	,844	943 8027	2992	,894	959 7245	3378
1,795	0,930 0661	+2616	1,845	0,944 1022	+2999	1,895	0,960 0628	+3386
,796	930 3281	2624	,846	944 4024	3006	,896	960 4018	3394
,797	930 5909	2632	,847	944 7035	3014	,897	960 7417	3402
,798	930 8544	2639	,848	945 0053	3021	,898	961 0823	3410
,799	931 1187	2647	,849	945 3078	3029	,899	961 4237	3418
1,800	0,931 3838	+2655	1,850	0,945 6112	+3038	1,900	0,961 7658	+3426
	$\frac{1}{2}\Delta^2 = +4$			$+4$			$+4$	

x	$\Gamma(x)$	Δ_m	x	$\Gamma(x)$	Δ_m	x	$\Gamma(x)$	Δ_m
1,900	0,961 7658	+3426	1,950	0,979 8807	+3822	2,000	1,000 0000	+4228
,901	962 1088	3434	,951	980 2632	3829	,001	000 4232	4236
,902	962 4525	3442	,952	980 6466	3838	,002	000 8472	4245
,903	962 7971	3450	,953	981 0308	3846	,003	001 2721	4253
,904	963 1424	3457	,954	981 4158	3854	,004	001 6977	4261
1,905	0,963 488$\bar{5}$	+3465	1,955	0,981 8016	+3862	2,005	1,002 1242	+4269
,906	963 8353	3473	,956	982 1881	3869	,006	002 5516	4278
,907	964 1830	3481	,957	982 5755	3878	,007	002 9797	4285
,908	964 531$\bar{5}$	3489	,958	982 9637	3886	,008	003 4087	4294
,909	964 8807	3496	,959	983 3527	3894	,009	003 838$\bar{5}$	4302
1,910	0,965 2307	+3504	1,960	0,983 7425	+3903	2,010	1,004 2691	+4311
,911	965 5815	3512	,961	984 1332	3911	,011	004 7006	4319
,912	965 9331	3520	,962	984 5246	3918	,012	005 1329	4327
,913	966 2855	3528	,963	984 9168	3926	,013	005 5660	4335
,914	966 6387	3536	,964	985 3098	3935	,014	005 9999	4344
1,915	0,966 9927	+3544	1,965	0,985 7037	+3943	2,015	1,006 4347	+4352
,916	967 3474	3552	,966	986 0983	3951	,016	006 8703	4361
,917	967 7030	3560	,967	986 4938	3959	,017	007 3068	4369
,918	968 0593	3567	,968	986 8900	3967	,018	007 7440	4377
,919	968 4164	3575	,969	987 2871	3975	,019	008 1821	4386
1,920	0,968 7743	+3583	1,970	0,987 685$\bar{0}$	+3983	2,020	1,008 6211	+4394
,921	969 1330	3591	,971	988 0837	3991	,021	009 0609	4402
,922	969 492$\bar{5}$	3599	,972	988 4832	3999	,022	009 501$\bar{5}$	4410
,923	969 8528	3607	,973	988 883$\bar{5}$	4007	,023	009 9429	4419
,924	970 2138	3615	,974	989 2846	4015	,024	010 3852	4427
1,925	0,970 5757	+3623	1,975	0,989 6865	+4024	2,025	1,010 8283	+4436
,926	970 9384	3631	,976	990 0893	4032	,026	011 2723	4444
,927	971 3018	3639	,977	990 4929	4040	,027	011 7171	4452
,928	971 6661	3647	,978	990 8972	4048	,028	012 1627	4460
,929	972 0311	3654	,979	991 3024	4056	,029	012 6091	4469
1,930	0,972 3969	+3662	1,980	0,991 7084	+4064	2,030	1,013 0564	+4478
,931	972 7635	3671	,981	992 1152	4072	,031	013 5046	4486
,932	973 1310	3679	,982	992 5229	4081	,032	013 9536	4494
,933	973 4992	3686	,983	992 9313	4088	,033	014 4034	4502
,934	973 8682	3694	,984	993 3406	4097	,034	014 8540	4511
1,935	0,974 2380	+3702	1,985	0,993 7506	+4105	2,035	1,015 3056	+4520
,936	974 6086	3710	,986	994 1615	4113	,036	015 7579	4527
,937	974 9800	3717	,987	994 5732	4121	,037	016 2111	4536
,938	975 3521	3725	,988	994 9858	4130	,038	016 6651	4545
,939	975 7251	3734	,989	995 3991	4137	0,39	017 1200	4553
1,940	0,976 0989	+3742	1,990	0,995 8133	+4146	2,040	1,017 5757	+4562
,941	976 473$\bar{5}$	3750	,991	996 2282	4153	,041	018 0323	4570
,942	976 8489	3758	,992	996 6440	4163	,042	018 4897	4579
,943	977 2250	3766	,993	997 0607	4171	,043	018 9480	4587
,944	977 6020	3774	,994	997 4781	4179	,044	019 4071	4595
1,945	0,977 9798	+3782	1,995	0,997 8964	+4187	2,045	1,019 8670	+4604
,946	978 3584	3789	,996	998 3154	4195	,046	020 3278	4612
,947	978 7377	3797	,997	998 7354	4203	,047	020 7894	4621
,948	979 1179	3806	,998	999 1561	4211	,048	021 2519	4630
,949	979 4989	3814	,999	999 5776	4220	,049	021 7153	4638
1,950	0,979 8807	+3822	2,000	1,000 0000	+4228	2,050	1,022 179$\bar{5}$	+4646
	$\frac{1}{2}\Delta^2 = +4$			$+4$			$+4$	

TAVOLA II.

Valori della funzione Γ (x)

con 5 cifre significative, per x compreso fra 0 e 10,9

x	,0	,1	,2	,3	,4	,5	,6	,7	,8	,9
0	∞	9,5135	4,5908	2,9916	2,2182	1,772$\bar{5}$	1,4892	1,2981	1,1642	1,0686
1	1	0,95135	0,91817	0,89747	0,88726	0,88623	0,89352	0,90864	0,93138	0,96177
2	1	1,046$\bar{5}$	1,1018	1,1667	1,2422	1,3293	1,4296	1,5447	1,676$\bar{5}$	1,8274
3	2	2,1976	2,4240	2,6834	2,9812	3,3234	3,7170	4,1707	4,6942	5,2993
4	6	6,8126	7,7567	8,8553	10,136	11,632	13,381	15,431	17,838	20,667
5	24	27,932	32,578	38,078	44,599	52,343	61,554	72,528	85,622	101,27
6	120	142,45	169,41	201,81	240,83	287,89	344,70	413,41	496,61	597,49
7	720	868,96	1050,3	1271,4	1541,3	1871,3	2275,0	2769,8	3376,9	4122,7
8	5040	6169,6	7562,3	9281,4	11406	14034	17290	21328	26340	32569
9	40320	49974	62011	77036	95809	119290	148700	185550	231790	289870
10	362880	454760	570500	716430	900610	1133300	1427500	1799800	2271600	2869700

TAVOLA III.

Valori della funzione $\Psi(x) = \frac{d}{dx} \log_e \Gamma(x)$

con 7 decimali, per x compreso tra 1,00 e 2,00.

x	$\Psi(x)$	Δ_m	$\frac{1}{2}\Delta^2$	$\frac{1}{6}\Delta_m^3$	x	$\Psi(x)$	Δ_m	$\frac{1}{2}\Delta^2$	$\frac{1}{6}\Delta_m^3$
1,00	—0,577 2157	+16 4504	—1202	+11	1,50	+0,036 4900	+9 3482	—414	+2
,01	560 885$\bar{5}$	16 2132	1170	10	,51	045 7968	9 2660	407	2
02	544 7893	15 9822	1140	10	,52	055 0221	9 1852	400	2
,03	528 9211	15 7572	1110	10	,53	064 1673	9 1058	394	2
,04	513 2749	15 5380	1081	9	,54	073 2337	9 0276	387	2
1,05	—0,497 8450	+15 3245	—1054	+ 9	1,55	+0,082 2226	+8 9507	—381	+2
,06	482 6259	15 1163	1028	9	,56	091 1352	8 8751	375	2
,07	467 6124	14 9133	1002	8	,57	099 9728	8 8007	369	2
,08	452 7993	14 7153	978	8	,58	108 7366	8 7275	363	2
,09	438 1818	14 5222	953	8	,59	117 4278	8 6554	357	2
1,10	—0,423 7549	+14 3337	— 931	+ 8	1,60	+0,126 047$\bar{5}$	+8 5845	—352	+2
,11	409 5143	14 1498	908	7	,61	134 5968	8 5146	346	2
,12	395 4553	13 9702	887	7	,62	143 0768	8 4459	340	2
,13	381 5738	13 7948	866	7	,63	151 4887	8 3783	335	2
,14	367 8656	13 6235	846	7	,64	159 833$\bar{5}$	8 3117	331	2
1,15	—0,354 3267	+13 4562	— 827	+ 6	1,65	+0,168 1121	+8 2460	—325	+2
,16	340 9532	13 2927	808	6	,66	176 3256	8 1814	320	2
,17	327 7413	13 1329	790	6	,67	184 4750	8 1178	316	2
,18	314 6874	12 9766	773	6	,68	192 5612	8 0551	311	2
,19	301 7881	12 8237	755	6	,69	200 5852	7 9933	306	1
1,20	—0,289 0399	+12 6743	— 739	+ 5	1,70	+0,208 5479	+7 9324	—302	+2
,21	276 439$\bar{5}$	12 5281	723	5	,71	216 4501	7 8725	297	2
,22	263 9837	12 3850	707	5	,72	224 2929	7 8134	293	1
,23	251 6694	12 2450	693	5	,73	232 0770	7 7551	289	2
,24	239 4937	12 1079	677	5	,74	239 8032	7 6977	284	1
1,25	—0,227 4535	+11 9737	— 664	+ 5	1,75	+0,247 472$\bar{5}$	+7 6411	—281	+1
,26	215 5462	11 8423	649	5	,76	255 0855	7 5853	276	1
,27	203 7688	11 7136	637	4	,77	262 6432	7 5303	273	1
,28	192 1189	11 5875	623	4	,78	270 1462	7 4761	269	1
,29	180 5937	11 4640	612	4	,79	277 5954	7 4226	266	1
1,30	—0,169 1909	+11 3429	— 599	+ 4	1,80	+0,284 9914	+7 3698	—261	+1
,31	157 9079	11 2242	587	4	,81	292 3351	7 3178	258	1
,32	146 7424	11 1079	575	4	,82	299 6271	7 2665	255	1
,33	135 6920	10 9939	565	4	,83	306 8681	7 2159	251	1
,34	124 7546	10 8820	554	4	,84	314 0589	7 1659	248	1
1,35	—0,113 9280	+10 7722	— 543	+ 4	1,85	+0,321 2000	+7 1166	—244	+1
,36	103 2101	10 6646	532	3	,86	328 2922	7 0680	242	1
,37	092 5987	10 5590	523	3	,87	335 3360	7 0200	237	1
,38	082 0920	10 4554	513	3	,88	342 3323	6 9727	236	1
,39	071 6879	10 3537	503	3	,89	349 2814	6 9259	231	1
1,40	—0,061 3845	+10 2539	— 495	+ 3	1,90	+0,356 1842	+6 8798	—229	+1
,41	051 1801	10 1558	485	3	,91	363 0411	6 8342	226	1
,42	041 0728	10 0596	477	3	,92	369 8527	6 7893	223	1
,43	031 0609	9 9650	468	3	,93	376 6197	6 7449	220	1
,44	021 1427	9 8722	459	3	,94	383 3426	6 7011	217	1
1,45	—0,011 3164	+ 9 7810	— 452	+ 3	1,95	+0,390 0220	+6 6578	—215	+1
,46	—0,001 5806	9 6914	443	3	,96	396 6583	6 6151	212	1
,47	+0,008 066$\bar{5}$	9 6034	436	2	,97	403 2522	6 5729	209	1
,48	017 6263	9 5169	429	2	,98	409 8042	6 5312	207	1
,49	027 1003	9 4318	421	2	,99	416 3147	6 4900	204	1
1,50	+0,036 4900	+ 9 3482	— 414	+ 2	2,00	+0,422 7843	+6 4494	—201	+1

TAVOLA IV.

Valori della funzione $\Psi(x) = \frac{d}{dx} \log_e \Gamma(x)$

con 4 decimali, per x compreso tra 0 e 10,9

x	,0	,1	,2	,3	,4	,5	,6	,7	,8	,9
0	— ∞	—10,4238	— 5,2890	— 3,5025	— 2,5614	— 1,9635	— 1,5406	— 1,2200	— 0,9650	— 0,7549
1	— 0,5772	— 0,4238	— 0,2890	— 0,1692	— 0,0614	+ $0,036\bar{5}$	+ 0,1260	+ 0,2085	+ 0,2850	+ 0,3562
2	+ 0,4228	+ 0,4853	+ 0,5443	+ 0,6000	+ 0,6529	+ 0,7032	+ 0,7510	+ 0,7968	+ 0,8405	+ 0,8825
3	0,9228	0,9615	0,9988	1,0348	1,0696	1,1032	1,1357	1,1672	1,1977	1,2273
4	1,2561	1,2841	1,3113	1,3379	1,3637	1,3889	1,4134	1,4374	1,4608	1,4837
5	1,5061	1,5280	1,5494	1,5704	1,5910	1,6111	1,6308	1,6502	1,6692	1,6878
6	1,7061	1,7241	1,7417	1,7591	1,7761	1,7929	1,8094	1,8256	1,8416	1,8573
7	1,8728	1,8880	1,9030	1,9178	1,9324	1,9468	1,9609	1,9749	1,9887	2,0022
8	2,0156	2,0289	2,0419	2,0548	2,0675	2,0801	$2,092\bar{5}$	2,1048	2,1169	2,1288
9	2,1406	2,1523	2,1639	2,1753	2,1866	2,1977	2,2088	2,2197	2,2305	2,2412
10	+ 2,2518	+ 2,2622	+ 2,2726	+ 2,2828	+ 2,2930	+ 2,3030	+ 2,3129	+ 2,3228	+ 2,3325	+ 2,3422