

V.

QUESTIONI ATTUARIALI E MATEMATICHE



Corporate Heritage
& Historical Archive

EVOLUZIONE DEL CONCETTO
DI RISERVA MATEMATICA E RIASSICURAZIONE

(Conferenza del prof. Filadelfo Insolera) ()*

INTRODUZIONE. — Anche nel campo scientifico, specie in quello delle scienze di applicazione, avviene non di rado, così come per molti fatti notevoli nella vita degli individui e nella storia dei popoli, che un episodio banale, una futilità impreveduta, determini una grande vicenda, decida d'una svolta storica, d'un dirizzone di secoli, di tendenze mentali, di atteggiamenti spirituali, che, una volta stabiliti ed accolti, rimangono a lungo dominanti, e ai quali ben difficilmente si riesce più in là a sottrarsi, anche se si voglia, fino a quando a poco a poco non si siano pienamente stabilite nuove condizioni di nuovi equilibri.

Il sorgere e l'evolversi della riserva matematica e degli studi e delle discussioni che da oltre 150 anni dominano, per essa, la Scienza attuariale e che ancor oggi non possono dirsi per anco concluse, son dovuti a due fatti di mera pratica amministrativa, direi commerciale, che l'attuario ha accettati, se non subiti, ma ai quali fu completamente estraneo.

Gli amministratori della « Equitable Assurance Society », nel 1762, prendevano l'iniziativa di consentire la sostituzione del contratto, rinnovabile, fin allora, di anno in anno, con un contratto a lunga scadenza, a premi periodici costanti, stimati, nell'insieme, equivalenti agli altri, variabili, cui si sostituivano. Semplificazione amministrativa, per un verso; agevolazione commerciale, per altro verso. I tecnici tutti, però, considerarono a innovazione provvedimento più che avventato, pazzesco addi-

(*) Tenuta il giorno 11 giugno 1928.

rittura. Sovvertire, invero, l'esercizio tranquillo e di sicuro reddito dell'assicurazione annuale sulla vita umana, con una facoltà che creava incerti legami fra una lunga serie di esercizi futuri; con l'aggravante dell'agevolazione offerta all'assicurato, di un premio, la cui misura costante sembrava beffarsi dell'andamento naturalmente variabile del rischio, fino allora canone assoluto dell'industria assicurativa, poteva esser giudicato un vero e proprio salto nel vuoto.

Per gli amministratori di ogni azienda industriale, quali che possano essere i requisiti riconosciuti utili, tuttavia uno solo forse ne è necessario: l'intuito psicologico, almeno in confronto della clientela dell'azienda da loro amministrata. E gli amministratori della « Equitable » si dimostrarono ottimi psicologi, intuendo il grande favore con cui il pubblico avrebbe accolto la riforma da loro introdotta. Infatti, per non soggiacere alla concorrenza, di lì a poco tutte le Compagnie, anche quelle che da principio più si dimostrarono avverse, furono costrette a seguire l'esempio della « Equitable »; sì che il sistema divenne generale.

Dopo circa un secolo, da allora, la direzione commerciale d'una Compagnia assicuratrice riesce, a rapidamente ingrossare il proprio portafoglio, stimolando come non mai i suoi produttori, coll'accoglierne la proposta di corrispondere il diritto di commissione, fino allora commisurato ad una percentuale del premio man mano riscosso, in un pagamento unico ed iniziale, commisurato ad un per cento della somma assicurata.

Il sistema, commercialmente ottimo, fu dovuto seguire man mano da tutte le Compagnie, per intuitive ragioni di vita.

Lunga scadenza dell'operazione a premi costanti, prima, e unicità di provvigione, poi, sono i due fatti, che parvero, allora, soltanto di natura amministrativa; ma che, tuttavia, sono indubbiamente i due cardini intorno a cui si impernia da oltre un secolo e mezzo tutto lo sviluppo della Scienza attuariale nel mondo.

* * *

DAI PREMI LORDI AI PREMI PURI. — Il premio periodico costante, adottato in luogo e vece del premio naturale crescente, per le assicurazioni in caso morte, riesce, come è noto, in un primo tempo, maggiore, e, in un secondo, minore del premio naturale, cui si sostituisce. L'assicurato versa, perciò, in un primo tempo, più di quello che la commisurazione del rischio non comporterebbe: eccedenza, il cui cumulo compenserà poi quel tanto in meno che, in un secondo tempo, sarà incassato. Si sente, pertanto, la necessità di costituire un fondo, il quale, a differenza di ogni riserva contabile, non può non essere per l'assicuratore un passivo *sui generis*, e quindi un credito *sui generis* della sua clientela. Nasce così la riserva matematica. Con ciò, per altro, si pone un problema, non lo si risolve. La nostra esposizione, anzi, mira a chiarire che il problema si può ben dire attenda ancor oggi la sua vera, scientifica, definitiva soluzione.

Dapprima, i tecnici della « Equitable » e, dopo di loro, quelli di tutte le Compagnie, che man mano venivano adottando i metodi della « Equitable », si preoccuparono di stabilire basi tecniche tali che questa nuova riserva rispondesse a un solo fine: la sua entità, cioè, dovesse dar sicurezza alla Compagnia, nel senso che la solidità finanziaria ne risultasse comunque garantita; e risultassero garantiti, altresì, gli utili che, fino a un certo segno giustamente, gli amministratori vogliono, in ogni tempo ed in ogni luogo, attendersi dall'esercizio di questa industria, come da quello di ogni altra.

E, allora, per il calcolo dei premi si adottò la « Northampton Table » del dott. PRICE, tavola di mortalità della quale si sapeva che, per grande tratto della vita, le corrispondenti misure di probabilità di morte risultavano superiori a quelle che le statistiche consentivano di attribuire alla clientela; e si scelse, altresì, un tasso di interesse notevolmente inferiore a quello di medio rendimento dei capitali (1). Unica preoccupazione dei tecnici essendo, in

(1) Cfr. G. H. RYAN, *Methods of Valuation and distribution of Profits in the United Kingdom*, III^e Congrès International d'Actuaires, Paris, 1900, p. 253.

fondo, quella di ottenere premi che risultassero inferiori al *premio massimo*: a quello, cioè, il cui deposito in Banca basterebbe per assicurare al cliente all'infuori ed al disopra di qualunque alea, la stessa somma assicurata, dopo lo stesso tempo e nelle identiche condizioni di capitalizzazione. Lo scarto fra questo premio limite e il premio calcolato dall'attuario, sta a rappresentare, appunto, il margine giustificativo e differenziale dell'industria assicurativa, in confronto di quella creditizia.

Pertanto, dal momento che a minor tasso di interesse corrispondono maggiori valori attuali, e a maggiore mortalità corrispondono maggiori valori di stima degli impegni, si pensava che la riduzione del tasso per un verso, e l'aumento di mortalità, per altro verso, dovessero convergere all'aumento della riserva matematica e quindi del coefficiente di sicurezza dell'equilibrio finanziario della Compagnia.

In questa credenza si adagiarono per molto tempo la « Equitable » e, appresso a lei, quante, ed erano molte, ne venivano, per ragioni di concorrenza, seguendo le orme.

I premi ottenuti con tali criteri — *premi lordi*, perchè contenenti un caricamento implicito — erano, per intero, adoperati alla determinazione dell'attivo della riserva e gli utili di mortalità e d'interesse, dopo coperta ogni spesa, fornivano gli utili di esercizio.

È questo il metodo *ipotetico*, così detto per il fatto delle basi tecniche fittizie prescelte, metodo che per circa un secolo dominò il campo attuariale.

Si pensava risultassero da tal metodo delle riserve sicure, ma ciò non impedì che parecchie Compagnie, di tempo in tempo, si venissero a trovare in condizioni tali da non poter fronteggiare gli impegni. Tali vicende non liete, fecero sorgere i primi dubbi intorno a ciò che, fino allora, pareva assiomatico. Il BAILY, per il primo, nel 1813 (1), muove accusa alle basi tecniche; qualche anno dopo è il GOMPERTZ che in un suo studio presentato alla « Royal Society » esprime nettamente la propria diffidenza per il metodo ipotetico, e condanna il sistema, allora seguito, per ragioni di concorrenza,

(1) *The doctrine of Life Annuities Assurance*, London 1813, pag. 506.

da molte Compagnie: di stabilire, cioè, empiricamente, prima, i premi; per inferirne, poi, i valori assicurativi; e risalire, infine, alla fittizia tavola di mortalità (1). Poco di poi è il BABBAGE che torna alla carica, scrivendo che, a suo giudizio, le Compagnie sarebbero meglio salvaguardate se adottassero una tavola di mortalità rispondente a quella effettiva degli assicurati, salvo ad aggiungere una quota di sicurezza alla corretta valutazione del rischio (2).

Malgrado l'autorità di questi nomi, le cose rimangono praticamente invariate per molto tempo ancora, e quando, nel 1850, appena sorto l'Istituto degli attuari di Londra, il JELICOE vi legge la memorabile relazione, con la quale, riprendendo gli appunti del BAILY, del GOMPertz e del BABBAGE, muove un fierissimo attacco al metodo dei premi lordi, questo è ancora pienamente in auge (3). Peraltro, si entra nella fase acuta della elevata polemica, fra i sostenitori del vecchio e quelli del nuovo metodo sorgente, — metodo che, perchè voleva un caricamento a parte, fu detto, per ragion di contrasto, metodo dei premi *puri* —; e per circa un decennio il campo degli attuari inglesi rimane diviso in due parti, finchè, nel 1863, avviene ciò che può dirsi lo scontro decisivo. Il « Giornale degli attuari inglesi » di quell'anno è quanto mai interessante: il metodo dei premi puri acquista man mano evidente favore e l'Istituto degli attuari, che si era venuto orientando verso di esso, riproduce la magnifica relazione del JELICOE, vecchia di 13 anni. Nel medesimo fascicolo, invece, il TÜCKER muove ad una difesa a fondo del vecchio metodo ipotetico e dimostra la superiorità numerica della riserva matematica, con esso ottenuta, e quindi la maggior sicurezza della Compagnia, rispetto a quella che vi corrisponderebbe col metodo puro (4). La dimostrazione del TÜCKER è esatta, nel caso particolare che al TÜCKER è servito: cioè, se con l'aumento di mortalità nelle assicurazioni caso morte, si ha un aumento del premio che sia frazione

(1) R. S. on 29th June 1820.

(2) *Comparative Views of the Various Institutions for the Assurance of Lives*. R. S. 1826.

(3) *On the Methods pursued in Valuing the risks of Life Assurance Companies and on the distribution of Surplus*. J. I. A. 1850.

(4) *On the proper mode of estimating the Liabilities of Life Insurance Companies*. J. I. A. X, 312 e XI, 90.

costante del premio stesso, allora la riserva matematica aumenta. Questo è però il solo caso di sicuro aumento della riserva matematica. Il JELICOE aveva già dimostrato che se all'aumento di mortalità corrisponde, nella misura del premio, un aumento che sia frazione costante del capitale assicurato, la riserva diminuisce. Ma, in risposta allo studio del TÜCKER, uno dei più grandi luminari della scienza attuariale inglese, lo SPRAGUE, dimostra che se tale aumento del premio, per effetto dell'aumento di mortalità, è funzione lineare omogenea sia del premio sia del capitale assicurato, la riserva può aumentare e può anche diminuire; comunque, col metodo difeso dal TÜCKER, anche quando avvenga aumento nella misura della riserva, la Compagnia non è in grado di formarsi un'idea sicura dell'entità dell'aumento (1). La Memoria dello SPRAGUE, cui fece subito seguito la dimostrazione della identità dei risultati che si conseguono, per la riserva, col metodo prospettivo e col metodo retrospettivo, se sono adoperati i medesimi premi puri, assieme alla dimostrazione del MAINLY che la tavola di Northampton, pur denunziando una mortalità maggiore della reale per un grande tratto della esistenza, conduceva a riserve matematiche inferiori a quelle dedotte coi premi puri costruiti sulla tavola di mortalità effettiva degli assicurati, diedero il colpo di grazia al metodo ipotetico (2). Soltanto allora, invero, molte Compagnie si indussero a modificare radicalmente le loro basi tecniche, tenendo conto dei risultati scientifici acquisiti attraverso il secolare dibattito.

* * *

DAI PREMI PURI AI PREMI DI COPERTURA. — Nel campo della teoria il metodo ipotetico non ha, ormai, che un mero valore storico. Fra i vari metodi di calcolo di riserva matematica che trovano cittadinanza nei testi, il posto d'onore è tenuto, oggi, dal metodo dei premi puri, come quello che, per unanime giu-

(1) *On certain Methods proposed for the valuation of Liabilities of a Life Assurance Company.* J. I. A., XI.

(2) *A Comparison of the value of Policies as found by means of the various tables of Mortality ecc.* J. I. A., XIV; 1868.

dizio, conferisce all'azienda assicuratrice la maggior somma di sicurezza.

Tuttavia, è proprio vero il detto che non v'ha rosa senza spine. Quasi contemporaneamente al trionfo scientifico del metodo delle riserve pure, avviene quel mutamento di sistema nel pagamento delle provvigioni ai produttori, cui avevo accennato in principio: invece, cioè, di corrispondere la provvigione sotto forma di percentuale dei premi all'incasso, intorno al 1860 una Compagnia accettò che la provvigione stessa fosse pagata una volta tanto, appena perfezionata la polizza, sotto forma di percentuale della somma assicurata. Come è facile intendere, l'esempio dovette essere seguito rapidamente da tutte le Compagnie.

Vediamone le conseguenze finanziarie interne per l'azienda assicuratrice. Col primo sistema, l'assicuratore non correva alee: la faceva solo da organo di trasmissione: nella quota di caricamento, implicito od esplicito, empirico o razionale, era compresa, invero, la percentuale di provvigione; sicchè l'assicurato pagava questa, col pagare del premio, e l'assicuratore si limitava a trasmetterla al produttore. Col nuovo sistema, invece, l'assicuratore deve anticipare subito una somma, della quale potrà rifarsi man mano con le corrispondenti aliquote di caricamento, implicite nei premi che verrà riscuotendo. È facile riconoscere che l'assicuratore cessa, con ciò, di essere organo semplicemente trasmettitore, e diviene parte in causa; poichè, anche se non è da escludere che da tale operazione possa trarre un margine di utile, non si può negare che possa andare incontro ad una remissione.

Il sistema ha, comunque, un riflesso interno considerevole, specie per le Società giovani. Proprio negli anni in cui la clientela è piccola e occorrono i maggiori sforzi e cautele di ogni specie, per la formazione duratura degli elementi di stabilità e di sviluppo dell'azienda, lo anticipare, invero, forti somme per provvigioni, può risolversi in una pericolosa operazione allo scoperto; mentre, d'altra parte, il prelevarli dalla riserva matematica, non conferisce moralmente, anzi determina una differenziazione, in confronto delle vecchie Compagnie, sommamente pregiudizievole alle nuove.

Del resto, il ricorso alle riserve matematiche, per fronteggiare il nuovo sistema, fu per qualche tempo espediente necessario, non solo alle Compagnie di nuova istituzione, ma anche a molte delle altre.

Anche questa volta, il tecnico si trova in contrasto con l'amministratore: prima aveva avversato il contratto a lunga scadenza, a premi costanti; poi il calcolo delle riserve coi premi puri; adesso si erige a tutore delle riserve pure, in contrasto con la nuova tendenza che si veniva determinando.

D'altra parte, a lume di buon senso, gli amministratori si domandavano: Se la riserva matematica è un passivo dell'impresa, in confronto degli assicurati, e lo anticipo delle spese di acquisizione è un passivo degli assicurati, in confronto dell'impresa; perchè non addivenire, anche subito ove occorra, attraverso le debite registrazioni, a un saldo delle due partite?

Si deve ad un attuario tedesco dei più acuti, lo ZILLMER, la risposta a questa domanda: risposta affermativa, purchè le spese di acquisto rimangano non superiori alla differenza fra il premio puro relativo all'età successiva a quella di entrata dell'assicurato e il premio di rischio del primo anno (1). Nel caso di uguaglianza, la riserva matematica del primo anno resterebbe, allora, nulla; mentre negli anni successivi si manterrebbe, in ogni caso, inferiore alla corrispondente riserva pura. La legittimità e il rigore delle deduzioni dello ZILLMER sono incontestabili. Senonchè offrono il fianco, intanto, a una obbiezione pratica: e cioè che, in regime di concorrenza, è ben difficile ad esse mantenere le spese di acquisizione nei limiti teorici assegnati dallo ZILLMER. Dal punto di vista teorico, poi, le premesse dello ZILLMER si prestano ad una immediata generalizzazione: allo stesso modo, invero, come si intende conservare solo il premio di rischio nel primo anno, si può far lo stesso, anche nel secondo, e anche oltre; cioè si può considerare, agli effetti della riserva, l'operazione come stipulata a premio di rischio, lungo una prima serie di anni: fino a quando il

(1) *Die rationelle Deckung der Abschlusskosten in der Lebensversicherung* Assekuranz Jahrbuch 1881: pag. 139-149.

premio puro, relativo all'età dell'ultimo di questi anni, non superi il premio lordo, corrispondente all'età del primo di essi. In corrispondenza la riserva matematica sarebbe nulla durante tutto questo periodo.

Tale generalizzazione è stata appunto suggerita e sostenuta dallo SPRAGUE, nel 1895, al Primo Congresso internazionale degli Attuari (1). Nella sua relazione lo SPRAGUE afferma duramente e senza ambagi che il valore della riserva per mezzo dei premi puri è erroneo (*erroneous*), se basato su ipotesi fittizie (*incorrect*). Lo SPRAGUE dimostra che, per un verso, la riserva così calcolata riesce eccessiva (*too large*) per i nuovi contratti; mentre, per altro verso, l'adozione di semplici frequenze di mortalità dei gruppi selezionati di assicurati, conduce, nella valutazione delle riserve, ad una riduzione del proprio valore, lasciando a disposizione, come utili di mortalità, somme che più opportunamente andrebbero a copertura delle prime spese.

In fondo, l'uso della tavola di mortalità di aggregati, invece di quelle selezionate, determina uno zillmeraggio di pessima lega, perchè subdolo e messo in azione all'infuori di quelle limitazioni che solo possono legittimarlo.

L'uso di tavole selezionate, per il calcolo della riserva matematica, secondo le idee dello SPRAGUE, incontrò maggior fortuna in Germania che non in Inghilterra: il KARUP se ne servì ampiamente per la radicale riforma tecnica della « Gothaer Lebens-Versicherungs-Bank » (1903) (2); e più tardi se ne avvalse, nella maniera più assoluta, l'HÖCKNER, per la « Mutua di Leipzig » da lui diretta (1908) (3). Anzi, questo attuario va ben oltre i principî dello

(1) *In valuing life policies should any allowance be made on account of the expense of obtaining new business? Explanation of a method of valuation which takes account of this expense* - I. Congrès Intern. d'Actuaires, Bruxelles, 1895, pag. 202.

(2) *Die Reform des Rechnungs-Wesens der Gothaer Lebensversicherungs-Bank*, Jena, 1903.

(3) *Aenderung der Rechnungsgrundlagen*, Leipzig, 1907; (*Logophilus*) *der Streit über die Zillmersche Methode in der Lebensversicherung*, Berlin, 1902; *Ueber die Bedeutung des Deckungskapitals in Lebens-Versicherungsbetrieb* Z. f. d. g. Versicherungs-Wissenschaft, 1905, pag. 511.

SPRAGUE: mentre questi, invero, così come lo ZILLMER, intende che in ogni caso sia evitata la formazione di riserve negative, l'HÖCKNER non se ne preoccupa, poichè egli osserva — dopo tutto, non senza ragione — che, in confronto di una collettività di assicurati la Compagnia può ben avere un credito ed accampare diritti su di esso, anche se per qualcuno degli assicurati tale credito possa e debba considerarsi inesigibile. L'HÖCKNER, comunque, trova estremamente pericoloso, per le Compagnie, l'uso di tavole di aggregati; e trova del tutto ingiusto, in confronto degli assicurati, il calcolo dei premi su tavole di mortalità non riproducenti la realtà del fenomeno, e sulla base di un tasso di interesse non corrispondente a quello di rendimento medio dell'impiego di capitali. Ad ogni modo, quel che importa, per l'HÖCKNER, è la costruzione di un capitale di copertura dei rischi che valga la differenza fra il valore di stima dei diritti degli assicurati, aumentato del valore di stima delle spese future, e il valore attuale dei premi sufficienti, come egli definisce i premi puri calcolati su basi tecniche reali, con l'aggiunta delle aliquote di caricamento per le varie spese.

Mentre lo SPRAGUE si preoccupa di conservare una percentuale di utili pressochè costante all'azienda; l'HÖCKNER vuole che si assicurino degli utili pressochè costanti agli assicurati, essendo questa la migliore condizione basilare per l'incremento della produzione. In fondo, il metodo di HÖCKNER mira ad evitare le perdite dei primi anni di esercizio, proprie del metodo dei premi puri, per sostituirvi utili pressochè costanti in tutti gli anni, a partire dal primo.

A meglio raggiungere tale intento sono stati suggeriti, poi, dall'ENGELBRECHT (1) e dal WULKOW (2) criteri modificativi del metodo di HÖCKNER. Il primo si preoccupa di trasformare il premio sufficiente con un'aggiunta (coefficiente di sicurezza) che valga a mantenerlo costante durante un lungo periodo (per esempio, una generazione); questo, che egli chiama premio di copertura, dovrebbe servire,

(1) *Das Deckungskapital in der Lebensversicherung*. Z. f. d. g. Vers. Wiss, 1907.

(2) *Technische Erfordernisse für die Berechnung der Dividenden-Reserve der Versicherten in der Lebensversicherung*. Berlin, 1912.

appunto, al calcolo del capitale di copertura, riservando un controllo e una revisione delle basi tecniche per il coefficiente di sicurezza, man mano che le circostanze lo consiglieranno.

Il WULKOW, invece, costruisce due sistemi di basi tecniche: basi di primo ordine, per il calcolo della riserva d'obbligo (*muss Reserve*), che corrisponderebbe alla riserva sicura di un tempo; e basi di secondo ordine, per una riserva facoltativa (*soll-Reserve*) che corrisponderebbe alla riserva giusta. Su queste basi di secondo ordine dovrebbero essere calcolati i premi industriali, tenendo conto della partecipazione degli assicurati agli utili. Queste basi dovrebbero essere controllate per evitare ogni alterazione del premio, modificando eventualmente la misura dei dividendi (1).

* * *

RISERVA E RIASSICURAZIONE, NEL PRESENTE E NEL FUTURO. — La veduta panoramica di questo rapido volo attraverso 150 anni di storia attuariale, offre lo spunto ad alcune considerazioni conclusive.

Dai premi lordi, come si è visto, si è passati ai premi puri; da questi, ai premi di riserva; ai premi sufficienti; ai premi di copertura. In altri termini dai premi lordi primitivi, attraverso i premi puri, si perviene ad altri premi lordi.

In corrispondenza, la riserva matematica, pur nella immutabilità aritmetica della sua definizione, muta di significato, oltrechè di entità, col mutare di valore e di significato dei termini dalla cui differenza essa discende: e la primitiva riserva matematica, la riserva di ZILLMER, il capitale di copertura sono altrettante tappe di un cammino, che non è a ritroso, ma indubbiamente non è rettilineo nel suo progredire. Dapprima, sola preoccupazione del tecnico fu quella di mantenere il premio industriale inferiore al premio

(1) Una vasta rassegna storica del periodo qui in rapida sintesi ricordato, si può trovare nell'articolo di P. SMOLENSKY, *La teoria della riserva matematica nell'assicurazione vita*. «Giorn. di Matem. Finanziaria», aprile e giugno, 1923.

massimo; più in là, all'assicurato si riconosce qualche maggior diritto e di questo si cerca, poi, di dare una valutazione quantitativa *a posteriori*, mediante una intelligente partecipazione agli utili. Comunque, non è difficile riconoscere che, man mano, vengono ad inserirsi, nel problema attuariale, altri fattori che ne influenzano la soluzione: sono fattori morali, il cui peso diviene sempre più sensibile. Si parla, prima, di riserva sicura; si scrive, poi, di riserva giusta: luoghi comuni entrambi, che si trascinano per decenni; si giudicano le tavole di aggregati, in confronto di quelle selezionate e se ne esaminano le conseguenze finanziarie, dal punto di vista degli assicurati, non meno che da quello degli assicuratori. Si dimostra, insomma, che v'ha qualche cosa di scientificamente inaccettabile e di moralmente non soddisfacente nelle soluzioni che man mano si vengono prospettando, e che ci permettono, appunto, di asserire, come dicevamo prima, che ancora oggi il problema non può dirsi compiutamente risoluto.

Anzi — e non me ne vogliano gli amici attuari che qui mi onorano di loro presenza — oserei affermare che, a mio giudizio almeno, l'attuario come tale, sia ormai incapace a dar lui la definitiva soluzione, perchè la storia del problema parmi stia a dimostrare che esso trascende il pretto campo attuariale, per essere, prima che attuariale, problema legale, problema economico, problema politico-sociale.

Per convincersene, del resto, basta uno sguardo alla situazione reale dell'industria assicurativa, la quale non sempre può dirsi lo specchio della scienza assicurativa, pur avendo avuto sempre l'attuario come anima intima delle sue azioni.

Guardiamo all'assicurato. L'assicurato, comunque colto, non ha mai saputo che cosa sia la riserva matematica, nè si preoccupa di saperlo: che questa Compagnia segua tale o tal altro procedimento; che quella pervenga ad uno piuttosto che ad altro risultato, son cose che non lo riguardano, o per lo meno che non lo preoccupano: egli, al più, si forma un giudizio di insieme sulla solidità della Compagnia e da esso si lascia guidare, quando non cede senz'altro alla voce incantatrice d'una sirena, sotto veste di produttore.

Ma dove l'assicurato non arriva, perchè non può o non vuole o non sa, soccorre, come si sa, in qualche modo la legge. Peraltro, le leggi che disciplinano l'industria delle assicurazioni conferiscono, forse, maggiore efficacia alle garanzie che l'industria stessa offre alla sua clientela? Come remora per evitare dei *remous*, forse sì; ma, sotto ogni altro punto di vista, non saprei cosa rispondere. Basti ricordare che alcune legislazioni, come per esempio la tedesca, consentono le riserve zillmerate; altre, come per esempio la nostra, vogliono le riserve pure. Queste dovrebbero essere maggiori di quelle, a parità di condizioni. Ma nella pratica, bene spesso, è appunto questa parità che manca.

Comunque, per giudicare della riserva pura, bisognerebbe cominciare a sapere qualche cosa dei premi puri. Ma dove e quali sono i premi puri? La verità vera è che l'industria assicuratrice di tutti i paesi ha preso, dei risultati scientifici, quel tanto che le ha fatto comodo: quando, invero, la tendenza a preferire il caricamento esplicito non ha potuto essere più arginata, l'industria vi ha acceduto; ma non di rado si è dimenticata che le basi tecniche avrebbero dovuto evitare il più che fosse stato possibile ogni caricamento implicito. E allora i cosiddetti premi puri, sono lordi; e i premi di tariffa sono doppiamente caricati. Ecco così che si presenta il lato economico del problema: quello dei costi.

Ma non basta. Là, ove le riserve zillmerate sono autorizzate, si adoperano le tavole di mortalità selezionate; là, ove la riserva deve essere pura, tale necessità non si sente: si manda, per tanto, a utili ciò che gli altri mandano a riserva; cioè, in regime di riserve pure, si opera, come già avevo accennato, un impuro zillmeraggio. L'efficacia della legge, in materia tecnica, si dimostra, perciò, nulla o quasi.

E qui giova aggiungere un'altra considerazione.

L'industria delle assicurazioni vita, come dicevo prima, nei suoi primi anni è costretta dalle provvigioni di acquisto ad uno sforzo finanziario di eccezione: però, ove le aziende giovani si potessero attenere allo stretto punto di vista scientifico, potrebbero fronteggiare tale loro sforzo iniziale, costituendo solo in parte

o non costituendo affatto, in questi primi anni, la riserva matematica, limitandosi all'assicurazione a premio di rischio. Ciò non apporterebbe il menomo pregiudizio alla stabilità dell'azienda e quindi agli interessi degli assicurati. Ma, allora, appare chiaro che l'obbligo che vien fatto di costituire le riserve pure, dove quest'obbligo vige, si risolve nel creare, al di fuori di ogni necessità tecnica, condizioni difficilissime al sorgere e all'affermarsi di nuove iniziative. Le nuove aziende, invero, in tali condizioni, se non vogliono votarsi a quasi sicura morte, si trovano costrette bene spesso a cedere, sotto forma di riassicurazione, una buona parte del loro portafoglio alle maggiori aziende e di queste accettare, direttamente o indirettamente, il controllo. In fondo, la legge che prescrive la costituzione delle riserve pure, facilita, se non crea, condizioni di quasi monopolio, nel quale finiscono col trovarsi tacitamente d'accordo e al quale si dimostrano singolarmente favorevoli tutti gli assicuratori.

I riflessi sociali e politici, oltre che economici, di questa condizione di cose meriterebbero, a mio modesto avviso, profondo esame e seria attenzione da quanti desiderano lo sviluppo della previdenza, anche privata, in armonia con lo sviluppo degli altri fattori della nostra economia.

Ho parlato di riassicurazione. Giova soffermarsi un poco su questa operazione, molto notevole; sia in sè, sia per i suoi possibili riflessi sulla costituzione delle riserve matematiche e su tutta la impostazione del problema attuariale che ci occupa.

Il diffondersi sempre maggiore di questa assicurazione dell'assicuratore, dimostra, intanto, che, comunque si voglia procedere, la riserva matematica, a sè stante, non è giudicata dall'assicuratore elemento di assoluta tranquillità. Da 25 anni funziona negli Stati Uniti, pur entro limiti non molto vasti, la riassicurazione-vita a premio di rischio; e in questi ultimi anni tale riassicurazione si va introducendo anche in Europa. Chi però legga le relazioni presentate, su tal metodo, all'ultimo Congresso internazionale degli Attuari, non credo ne riceva la migliore impressione.

Sta di fatto, che la maggior parte della riassicurazioni è compiuta con sistemi empirici, che ricordano quelli già in uso per

l'assicurazione vita prima del 1762, nella quale epoca si addivenne all'adozione dei premi costanti. Non solo: ma a rigor di termini, più e meglio che di riassicurazioni sarebbe il caso, molte volte, di riparlare di coassicurazioni.

La riassicurazione a premio di rischio avrebbe il vantaggio di evitare questi inconvenienti; e sarebbe scientificamente corretta, poichè si limiterebbe a garantire la copertura del capitale ridotto.

Si può osservare, per altro, che il premio di rischio crescente presenta, nel confronto della riassicurazione, gli identici inconvenienti, di pratica natura, del premio naturale, nell'assicurazione diretta. Lo SCHULZ — uno dei relatori sulla riassicurazione a premio di rischio al Congresso ricordato — ciò osserva e propone che si addivenga alla costituzione di un premio costante equivalente, agli effetti finanziari, al premio di rischio crescente (1). Naturalmente il riassicuratore dovrebbe costituire, a tale intento, una riserva matematica — che si potrebbe dire di second'ordine — ed è credito collettivo degli assicuratori in confronto del riassicuratore.

Lo SCHULZ non guarda alla riserva matematica — che possiamo dire di primo ordine ed è credito collettivo degli assicurati, in confronto dell'assicuratore —. Ma è evidente che, se dal premio puro costante si toglie, agli effetti della riassicurazione, una parte costante, rimane una seconda parte, anche essa costante: e sarebbe, allora, la capitalizzazione di questa che porterebbe alla riserva matematica.

Questa considerazione, che mi viene suggerita dalla Nota dello SCHULZ, mi fa anche pensare che, forse, potrebbe riescire scientificamente saggia e praticamente utile l'adozione dei metodi dello SPRAGUE e dell'HÖCKNER, per la riassicurazione. Tale adozione, congiuntamente alla trasformazione in premio costante, equivalente agli effetti finanziari, del premio di risparmio, lascerebbe appunto nei primi anni, essendo il premio di risparmio decrescente, una parte del premio puro a disposizione dell'assicuratore, pur non

(1) *Risiko-Prämien Verfahren in der Lebens-Rückversicherung*, VIII International Congress of Actuaries, vol. IV, pag. 357-367.

riducendo, in definitiva, quella riserva che sostituirebbe la riserva pura.

Quale che possa essere l'effettiva portata del concetto, ora sommariamente esposto, il procedimento, a mio avviso, avrebbe in ogni caso un grande pregio: quello di indurre assicuratori e riassicuratori a razionalizzare scientificamente i loro rapporti, con vantaggio loro e degli assicurati. Anzi, ove il riassicuratore aggiungesse sempre, in confronto dell'assicurato, a quella generale dell'assicuratore, la propria garanzia, limitatamente al capitale ridotto, si raggiungerebbe quella maggiore efficienza di sicurezza, che finora le varie legislazioni non sono effettivamente riuscite a stabilire.

Ciò, ritengo, darebbe forte impulso allo sviluppo della previdenza, anche privata: il che, al di fuori e al di sopra di qualunque veduta scientifica o industriale, non può non essere il voto di quanti intendono che lo sviluppo della previdenza è fattore non ultimo del divenire della nostra economia e quindi della grandezza e prosperità della Patria nostra.

L'ANALISI PERIODALE DEI FENOMENI CICLICI

(Conferenza del Prof. Gino Cassinis) (*).

I fenomeni ciclici, e cioè quelli che ripetono almeno approssimativamente il loro andamento in cicli successivi di tempo, sono comunissimi in natura, e si incontrano con grande frequenza anche negli studi economici e statistici.

Un caso particolare è rappresentato dai *movimenti periodici*, il cui ciclo, detto meglio *periodo*, ha durata costante. Nei periodici propriamente detti, il fenomeno si riproduce identicamente ad ogni periodo, in modo che la sua ampiezza nell'istante corrispondente a una certa frazione del periodo è indipendente dal ciclo che si considera; in altri, pur mantenendosi costante il valore del periodo, le ampiezze variano da ciclo a ciclo. A quest'ultima categoria appartengono i fenomeni *oscillatori smorzati*, che si verificano in natura quando è messa in gioco una determinata quantità di energia, senza che vi sia la possibilità di ripristinare quella che ad ogni ciclo si spende per mantenere il movimento vincendo le resistenze passive (1).

Nei fenomeni ciclici generici si ha un andamento variabile da ciclo a ciclo, e la durata dei cicli successivi non è costante; e molte volte, anzi, il carattere ciclico non apparisce a prima vista e si

(*) Tenuta il giorno 28 aprile 1922.

(1) Se t è la variabile indipendente e y la dipendente, e si pone: $y = f(t)$, la funzione f si dice periodica quando esistono dei numeri T per i quali si ha: $f(t + T) = f(t)$ qualunque sia t . Il più piccolo valore di T per il quale è verificata l'uguaglianza precedente, prende il nome di *periodo* della funzione f .

Si può sempre ricondurre un fenomeno di periodo T ad avere il periodo 2π , effettuando il cambiamento di variabile: $x = \frac{2\pi}{T} t$.

Se $f(t)$ è funzione periodica, l'espressione: $y = e^{-kt} f(t)$, ove $k > 0$, dà un esempio di fenomeno *oscillatorio smorzato*.

rivela solo dopo indagini più o meno difficili. Evidentemente, lo studio di tali fenomeni è più complesso di quello dei periodici, dal quale deve essere preceduto, anche perchè di solito l'analisi di un moto ciclico si effettua scindendolo in un certo numero di movimenti periodici componenti. Per questo motivo, reputo opportuno richiamare alcuni elementi dello studio dei fenomeni periodici propriamente detti (1).

Il più semplice di questi è l'*oscillazione sinusoidale* o moto armonico. Oltre al periodo (durata di un'oscillazione) e alla sua inversa (*frequenza*), sono elementi caratteristici di un'onda sinusoidale la *fase* e l'*ampiezza*, e cioè il valore dell'argomento all'istante iniziale e il valor massimo dell'ampiezza (2). Si trovano in natura, o si possono produrre artificialmente, movimenti sinusoidali puri, o semplici; ma molte volte un'onda di questo tipo è accompagnata dalle sue *armoniche*, e cioè da onde analoghe di frequenza multipla della fondamentale e di ampiezza minore.

Due onde sinusoidali pure, di periodi diversi, possono, componendosi, dar luogo a un fenomeno risultante periodico (*interferenze, moti pendolari*), ma anche a un fenomeno *aperiodico*, o *quasi-periodico*, come comunemente si dice, per tener conto del carattere dei moti componenti. Questo ultimo fatto si verifica quando i periodi delle due onde componenti sono incommensurabili tra loro. Ciò che si è detto per due, si estende a un numero qualunque di componenti sinusoidali; e ne segue che, praticamente, sarà da considerare come aperiodico o quasi periodico il movimento risul-

(1) A questo proposito, vedere i Trattati di analisi infinitesimale e le Opere sulla Serie di FOURIER. Vedere anche: G. CASSINIS, *Calcoli numerici, grafici e meccanici*. Pisa, 1928.

(2) L'oscillazione sinusoidale rappresentata dall'espressione:

$$y = E_p \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{p} t + \varphi_p \right),$$

ha periodo p e frequenza $\omega = \frac{2\pi}{p}$; inoltre, E_p è l'ampiezza (o ampiezza), e φ_p la fase dell'onda. E_p e φ_p sono costanti.

tante di molte onde sinusoidali componenti, i cui periodi non siano sottomultipli dello stesso numero (1).

Da questa semplice osservazione risalta il grado di indeterminazione, direi di incertezza, che può presentare lo studio di un fenomeno qualunque, il quale, sotto veste più o meno irregolare, può anche nascondere la reale esistenza di moti ciclici e periodici

(1) Si consideri il fenomeno rappresentato dall'equazione:

$$[I] \quad y = \text{sen } \omega_1 t + \text{sen } \omega_2 t,$$

che risulta dalla sovrapposizione di due moti sinusoidali puri, di frequenze ω_1 e ω_2 , di amplitudini per entrambi unitarie e di fasi nulle. Per una nota formula di trigonometria, si può anche scrivere:

$$y = 2 \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \cdot \text{sen } \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t.$$

Questa può considerarsi un'oscillazione di frequenza $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ (e periodo $\frac{4\pi}{\omega_1 + \omega_2}$), che però non ha amplitudine costante: l'amplitudine varia secondo la legge

$$E = 2 \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t,$$

con frequenza $\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$ (e periodo $\frac{4\pi}{\omega_1 - \omega_2}$).

Se ω_1 e ω_2 sono incommensurabili, il rapporto dei periodi: $\frac{\omega_1 + \omega_2}{\omega_1 - \omega_2}$ non si può ridurre a numero razionale, e il fenomeno [I] non è periodico. Funzioni di questo tipo prendono il nome di *quasi-periodiche*.

Se ω_1 e ω_2 sono commensurabili, il moto è periodico con amplitudine variabile (fenomeno delle interferenze, movimenti pendolari). Quando $\omega_1 - \omega_2$ è piccolo rispetto a $\omega_1 + \omega_2$, il periodo risultante ha valore molto grande: ed è in questi casi che spesso si considera il fenomeno come quasi periodico o aperiodico.

Queste considerazioni si estendono al caso in cui le onde componenti siano in numero qualunque.

A titolo di esempio, osserviamo con N. BERNSTEIN che, se i periodi delle onde luminose che costituiscono lo spettro del ferro, i quali per la parte visibile dello spettro sono compresi tra $14 \cdot 10^{-16}$ e $25 \cdot 10^{-16}$ secondi, si suppongono commensurabili tra loro (ciò che in realtà non è), si ottiene un periodo risultante superiore a 10^{1000} anni! È perciò che la luce composta emessa dal ferro al calor bianco deve considerarsi come un fenomeno aperiodico.

propriamente detti. D'altra parte, l'importanza di tale genere di ricerche è grandissima, tanto dal punto di vista teorico che da quello pratico, e non nelle sole scienze fisiche (astronomia, geofisica, ecc.) ma anche nelle biologiche, economiche e statistiche in genere (1).

Certe volte, la *rappresentazione empirica* di un fenomeno ha scopo semplicemente particolaristico; ma nella maggioranza dei casi è attraverso analisi e rappresentazioni empiriche di fenomeni dello stesso tipo, riproducendosi in località e in tempi diversi, che si cerca la via per giungere ad una conoscenza più intima del fatto e alla enunciazione di qualche legge di carattere generale. Questa ricerca presenta sempre un notevole grado di indeterminazione, come sopra si è accennato, ed è perciò che l'analisi non può essere esclusivamente appoggiata su prefissati schemi matematici. Prima, dovranno effettuarsi: lo studio accurato di tutte le circostanze agenti (o almeno di quelle che sono a nostra conoscenza o sospettabili con una certa sicurezza), il raffronto tra il fenomeno in esame e altri analoghi, e le opportune deduzioni logiche; e, basandosi su questo lavoro preliminare, si potrà formulare qualche ipotesi sulla natura delle leggi che governano il fenomeno e sulle formule empiriche che meglio si presteranno a renderne conto quantitativamente. Interviene allora la matematica, calcolo delle probabilità compreso, la quale ci dà i mezzi per ottenere i parametri che compariscono nelle formule adottate.

Generalmente, l'indeterminazione insita nel problema permette di seguire varie strade e di trovare formule, anche di tipo diverso, che rendono numericamente conto del fenomeno osservato in modo ugualmente soddisfacente. Finchè non saremo in possesso di un criterio per scegliere tra queste formule la più conveniente, esse dovranno ritenersi tutte equivalenti; e noi non avremo ottenuto un risultato importante e generale, ma solo delle rappresentazioni più o meno soddisfacenti e perfette dei fatti osservati. Cio-

(1) Per le scienze fisiche e naturali basta pensare alle stelle variabili, alla previsione degli elementi meteorologici, alla circolazione del sangue, alle oscillazioni che si presentano nel numero degli animali di una data specie, ecc.

Per le altre, il fenomeno più importante che rientra nel campo considerato è certo quello delle crisi economiche.

nonostante, le nostre formule potranno sempre servire a qualche cosa, perchè, generalmente, ci consentiranno di estrapolare, sia pure per un intervallo di tempo piuttosto breve, in modo da prevedere lo svolgimento del fenomeno anche in un prossimo avvenire; oppure di formarci un modello del fenomeno stesso, che in molte circostanze potrà essere prezioso.

Ma solo quando ci sia possibile scegliere una delle espressioni calcolate che meglio delle altre rappresenti il fenomeno in tutte le modalità nelle quali è stato osservato nei vari tempi e luoghi, e quando questa formula si dimostri anche in seguito la più adatta e non cada mai in difetto, noi avremo, con una certa attendibilità, trovato la legge che cercavamo. In queste ricerche intervengono spesso criteri probabilistici e statistici, sui quali non è qui il caso di insistere (1).

Ritorniamo, piuttosto, allo studio dei fenomeni periodici propriamente detti, e consideriamo un'onda di forma qualsiasi, che si ripete identica a sè stessa nei successivi cicli. La via aperta da CLAIRAUT, EULERO e LAGRANGE è stata brillantemente battuta da FOURIER, GAUSS e BESSEL, i quali hanno dato un procedimento di scomposizione dell'onda complessa in una sinusoidale fondamentale e nelle sue armoniche, che va sotto il nome di *analisi armonica* o sviluppo di FOURIER. Il più delle volte esisterebbero infinite armoniche, per modo che, teoricamente, si dovrebbe effettuare uno sviluppo in serie; ma, in generale, e per la limitazione del numero dei dati sperimentali, e in causa della esistenza degli errori di osservazione, e perchè le armoniche successive hanno amplitudini rapidamente decrescenti, la serie si riduce a un polinomio e spesso anche di non molti termini (2).

(1) A questo proposito, v. il cap. XIV del mio libro citato sopra. Vedere anche i *Trattati di Statistica*, in particolare quelli pregevoli del MORTARA e del VINCI.

(2) Lo sviluppo di FOURIER di una funzione $y = f(t)$ nell'intervallo $(0, \theta)$, è:

$$\begin{aligned} \text{[II]} \quad y = f(t) = & a_0 + a_1 \cos \frac{2\pi}{\theta} t + a_2 \cos 2 \frac{2\pi}{\theta} t + a_3 \cos 3 \frac{2\pi}{\theta} t + \dots \\ & + b_1 \sin \frac{2\pi}{\theta} t + b_2 \sin 2 \frac{2\pi}{\theta} t + b_3 \sin 3 \frac{2\pi}{\theta} t + \dots \end{aligned}$$

Non mi soffermo sulle ricerche teoriche cui ha dato origine la serie di FOURIER, nè sui molteplici metodi pratici per calcolare le amplitudini e le fasi delle onde sinusoidali componenti, metodi di tipo numerico, grafico e meccanico, alcuni dei quali veramente geniali e preziosissimi. Desidero, invece, mettere in evidenza un fatto che ha importanza per quanto segue.

Lo sviluppo di FOURIER si può applicare, salvo modestissime restrizioni, a qualsiasi funzione, periodica oppur no, anche discontinua e non rappresentabile in forma finita con i metodi classici dell'analisi matematica, come anche a qualsiasi variabile dipendente empirica definita in un certo intervallo della variabile indipendente: per esempio, all'ampiezza di un fenomeno qualunque conosciuta in un determinato intervallo di tempo. Se la funzione è periodica di periodo noto, e se ne conoscono i valori per tutto un periodo (o, anche, in corrispondenza di un certo numero di ascisse distribuite lungo un periodo), si assumerà ovviamente il periodo della

con:

$$a_0 = \frac{1}{\Theta} \int_0^{\Theta} y \cdot dt$$

$$(III) \quad a_s = \frac{2}{\Theta} \int_0^{\Theta} y \cdot \cos \frac{2\pi}{\Theta} s t \cdot dt \quad (s = 1, 2, 3, \dots)$$

$$b_s = \frac{2}{\Theta} \int_0^{\Theta} y \cdot \text{sen} \frac{2\pi}{\Theta} s t \cdot dt.$$

Queste formule valgono in condizioni di grandissima generalità per la funzione f .

Quando nell'intervallo $(0, \Theta)$ si conosce solo un numero discreto di valori di y , agli integrali dei secondi membri delle (III) si sostituiscono delle somme.

Lo sviluppo (II) può anche scriversi nella forma:

$$[II'] \quad y = E_0 + \sum_{s=1}^{\infty} E_s \text{sen} \left(\frac{2\pi}{\Theta} s t + \varphi_s \right),$$

dove sono messe in evidenza le amplitudini e le fasi delle varie onde componenti.

funzione data come fondamentale, e si otterrà uno sviluppo valevole identicamente per un altro periodo qualunque, e che, quando si tratta di un fenomeno meccanico, acustico, elettrico, ecc., rappresenta anche fisicamente il fenomeno. Ma se la funzione è, o pare, aperiodica, o se, pur presupponendola periodica, se ne conoscono i valori solo per una frazione del periodo, come ci si deve regolare? La matematica dice che è possibile anche in questi casi effettuare con le medesime regole lo sviluppo di FOURIER, assumendo come periodo fondamentale l'intero intervallo in cui sono dati i valori della funzione. Ma lo sviluppo ottenuto non ha significato fisico, nè può servire a determinare valori estrapolati della funzione, neppure a piccolissima distanza dagli estremi dell'intervallo in cui essa è conosciuta. Dunque, pur essendo lo sviluppo di FOURIER applicabile a qualunque funzione (con le modeste restrizioni cui si è accennato sopra), esso non ha importanza pratica immediata che quando la funzione è periodica propriamente detta e l'intervallo assunto è uguale ad un intero periodo.

Come ci si dovrà regolare negli altri casi? Questa domanda ci conduce subito al problema che costituisce il principale motivo della nostra esposizione.

Si possono distinguere due casi. Si sa già, in base a considerazioni preliminari o teoriche, che il fenomeno in esame è costituito dalla sovrapposizione di onde sinusoidali, delle quali si conoscono i periodi. Si tratta, allora, di determinare le amplitudini e le fasi, e ciò può farsi impiegando i vari metodi per la combinazione delle osservazioni affette da errori accidentali, primo fra tutti quello dei minimi quadrati. Ma i calcoli, già notevolmente lunghi e complessi quando le onde componenti sono un poco numerose, diventano assai delicati se alcuni dei periodi elementari hanno valori poco diversi uno dall'altro. Un esempio classico è offerto dall'analisi delle maree di cui la teoria dà i periodi delle principali onde componenti: per esempio, si possono considerare 11 periodi semidiurni, alcuni dei quali differiscono tra loro solo per piccole frazioni di ora, 7 periodi diurni nelle stesse condizioni, e altri di maggior durata. Anche qui, oltre ai metodi numerici, se ne sono escogitati di grafici e di meccanici, ed è a tutti nota l'esistenza del « tidepredicter » di

Lord KELVIN, apparecchio assai complicato e costoso, ma preziosissimo, che, dopo aver effettuato l'analisi di una marea, può eseguire la sintesi, in modo da ottenere la previsione per tempi successivi. Lo stesso problema è risolto meccanicamente dall'analizzatore di MICHELSON e STRATTON.

Il secondo caso si presenta quando i valori degli eventuali periodi componenti di un moto più o meno irregolare non sono noti, e conduce al problema della *ricerca delle periodicità*, o anche, come lo ha chiamato il VERCELLI, dell'*analisi periodale*. Questo problema è stato posto fin dal secolo XVIII, e LAGRANGE ne ha dato nel 1772 una soluzione pregevole, ma non conveniente in pratica. A partire dal 1847, anno in cui un importante lavoro in proposito fu pubblicato da BUYS-BALLOT, e durante la seconda metà del secolo XIX, parecchi studi si seguirono, senza però condurre a soluzioni praticamente utili. È solo dopo il 1898, data dell'apparizione del metodo di SCHUSTER, che numerosi matematici e fisici, astronomi e geofisici si occuparono dell'argomento studiandolo sia dal punto di vista delle teorie analitiche, sia da quello delle applicazioni all'esame dei fenomeni naturali. E ora siamo in piena fioritura di lavori più o meno importanti, i principali dei quali contribuiscono alla definitiva sistemazione e definizione dei procedimenti più utili, o enunciano altri brillanti metodi degni di accurato esame. Io mi accontenterò di dare un rapidissimo cenno di alcuni procedimenti attualmente in uso, fermandomi un poco più a lungo su quello già citato di SCHUSTER (1).

Il primo metodo che si affaccia alla mente di chi, anche ignaro di matematica, considera il problema, è il seguente. Si disegni un diagramma cartesiano del fenomeno, riportando ascisse proporzionali ai tempi e ordinate proporzionali alle ampiezze. Si divida l'intervallo di tempo compreso tra i due massimi estremi per il numero dei massimi in esso contenuti, e si otterrà il valore appros-

(1) La letteratura in proposito è già molto abbondante. Esiste, poi, un'opera esclusivamente dedicata all'analisi periodale: K. STUMPF, *Analyse periodischer Vorgänge*, Berlin, 1927; la quale, oltre all'esposizione dei vari metodi, contiene una estesa lista bibliografica.

simativo del periodo dell'onda principale. Questo metodo può portare a qualche utile risultato se esiste una sola onda, o se una delle onde componenti ha amplitudine notevolmente superiore alla somma delle altre, e l'intervallo delle osservazioni comprende grande numero di periodi. Una volta determinato il periodo dell'onda predominante, si tratta di eliminare dal grafico l'onda stessa. Ciò può farsi usufruendo del *metodo delle residuazioni* di WEDMORE e CHRYSTAL, basato sulla constatazione che, sommando la curva data con la stessa spostata lungo l'asse delle ascisse di metà del periodo, si ottiene un diagramma dal quale risultano eliminate l'onda fondamentale e le sue armoniche dispari eventualmente presenti (1). Il metodo si può applicare praticamente servendosi del cosiddetto cartoncino FABRIS, o, meglio ancora, dell'analizzatore TAVANTI, che traccia automaticamente la curva residuata. La quale presenterà ancora un certo numero di massimi (di valore notevolmente minore di quelli esistenti nel diagramma di partenza), che consentiranno la determinazione del periodo della seconda onda componente, la cui eliminazione si otterrà nello stesso modo. E così via.

Questo procedimento può dare ottimi risultati. Il nostro VERCELLI lo ha applicato sistematicamente a varie classi di fenomeni

(1) Si supponga che la funzione $f(t)$ abbia la forma:

$$f(t) = F(t) + \Phi(t),$$

con Φ funzione periodica di periodo T . Sviluppando Φ in serie di FOURIER, si potrà anche scrivere:

$$f(t) = F(t) + \sum_1^{\infty} E_s \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{T} s t + \varphi_s \right).$$

Lo spostamento di $\frac{T}{2}$ dà:

$$f\left(t - \frac{T}{2}\right) = F\left(t - \frac{T}{2}\right) + \sum_1^{\infty} E_s \operatorname{sen} \left\{ \frac{2\pi}{T} s \left(t - \frac{T}{2}\right) + \varphi_s \right\}$$

e quindi:

$$f(t) + f\left(t - \frac{T}{2}\right) = F(t) + F\left(t - \frac{T}{2}\right) + \sum_1^{\infty} E_s \operatorname{sen} \left\{ \frac{2\pi}{T} s \left(t - \frac{T}{4}\right) + \varphi_s \right\} \cdot \cos \frac{\pi}{2} s,$$

che dimostra l'asserto.

meteorologici, mareografici, geofisici in genere, con esito brillante, specialmente nelle predizioni meteorologiche.

Un metodo analogo, dovuto a SOMMERFELD e KLEIN, conduce alla eliminazione dell'onda principale mediante la differenza della curva data e della stessa spostata lungo l'asse delle ascisse di un intero periodo; in questo modo, oltre l'onda fondamentale, si eliminano tutte le sue armoniche eventualmente esistenti nel fenomeno (1).

Entrambi i procedimenti possono essere studiati analiticamente e applicati per via numerica invece che grafico-meccanica. Un esame molto accurato di essi è stato fatto al V Congresso di Fisica dell'Unione sovietica dal russo NICOLA BERNSTEIN, il quale, certamente non a conoscenza di alcuni precedenti, e, in particolare, del più che decennale lavoro italiano in proposito, dà loro il nome di *metodi di distillazione*, e progetta uno schema di analizzatore che differisce solo nei particolari da quello TAVANTI. È da sperare che la pubblicazione della « Bibliografia scientifico-tecnica italiana », ora iniziata per opera del Consiglio nazionale delle ricerche, valga ad evitare per l'avvenire simili non rare omissioni (2).

Il metodo di LAGRANGE al quale si è accennato sopra, è stato ripreso e perfezionato da DALE nel 1914. Nella forma che DALE gli ha dato, esso fa parte di un gruppo di metodi importantissimi specialmente dal punto di vista teorico, ma certo non privi di valore pratico, i quali riconducono il problema della ricerca del numero e dei valori dei periodi alla risoluzione di certe equazioni differenziali, o alle differenze finite, o alle somme, e di un'equazione

(1) La dimostrazione è analoga alla precedente.

(2) Il metodo grafico-meccanico è illustrato nella *Guida pratica per l'analisi periodale* pubblicata dalla nostra Commissione mareografica (Venezia, 1927).

Utilizzando il procedimento accennato nel testo, SOMMERFELD e KLEIN hanno effettuato l'analisi del movimento dei poli terrestri (v. *Die Theorie des Kreisels*, Berlin, 1904, vol. II).

L'articolo di N. BERNSTEIN qui ricordato, a parte il difetto di ignorare i lavori italiani, è molto interessante e di proficua lettura. Esso ha il titolo: *Analyse aperiodischer trigonometrischer Reihen*, ed è pubblicato nella « Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik » del dicembre 1927 (pag. 476).

algebraica di grado uguale al numero dei periodi incogniti. Questi procedimenti, oltre che da DALE, sono stati elaborati principalmente da OPPENHEIM, KÜHNEN, HOPFNER, BRUNS, HIRAYAMA, tra il 1909 e il 1916. Un elegante teorema di HOPFNER consente di determinare il numero dei periodi calcolando i successivi valori di certi determinanti di ordine crescente, fino a quando se ne trova uno nullo; teorema che DALE e STUMPF hanno adattato al caso, che solo si presenta realmente in pratica, in cui i valori osservati sono affetti da errori (1).

(1) I procedimenti accennati sono appoggiati alla osservazione che dalla equazione:

$$[IV] \quad y = \sum_1^n E_s \operatorname{sen} (\omega_s t + \varphi_s) ,$$

derivando $2r$ volte si ha l'equazione differenziale:

$$[IV'] \quad y^{(2r)} = - \sum_1^n \omega_s^{2r} E_s \operatorname{sen} (\omega_s t + \varphi_s) .$$

Scrivendo quest'ultima per $r = 1, 2, \dots, n$ ed eliminando tra le $n + 1$ equazioni [IV], [IV'] gli n termini $E_s \operatorname{sen} (\omega_s t + \varphi_s)$, si ottiene un'equazione di grado $2n$ tra le ω_s , che si presenta come equazione lineare tra le n funzioni simmetriche elementari dei gradi $2, 4, 6, \dots, 2n$ che si possono costruire con le ω_s .

Attribuendo n valori equidistanti alla variabile t , si ottengono n di tali equazioni, che costituiscono un sistema, da cui, attraverso l'equazione caratteristica, si ricavano i valori delle ω_s .

In pratica, dato un numero discreto di valori per y , le derivate si calcolano con le note formule servendosi dello specchio delle differenze.

I determinanti di HOPFNER sono :

$$D_k = \begin{vmatrix} y_1^{(2)} & y_1^{(4)} & y_1^{(6)} & \dots & y_1^{(2k)} \\ y_2^{(2)} & y_2^{(4)} & y_2^{(6)} & \dots & y_2^{(2k)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_k^{(2)} & y_k^{(4)} & y_k^{(6)} & \dots & y_k^{(2k)} \end{vmatrix} \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

(dove le y corrispondono ai valori equidistanti di t), e se D_p è il primo di essi che si annulla, p è il numero dei periodi componenti.

Nel caso in cui le osservazioni siano affette da errori, tali che se ne possano trascurare le potenze superiori alla prima, STUMPF considera il rapporto

Un procedimento che, almeno in parte, si riattacca ai precedenti, è stato dato pochi mesi fa da FELICE BERNSTEIN. Pare che esso abbia il pregio di separare sicuramente anche onde di frequenza molto prossima; ma, almeno per ora, manca di un criterio per stabilire il numero delle onde componenti (1).

È molto interessante il metodo di analisi periodale appoggiato al calcolo dei coefficienti di FOURIER fatto assumendo come periodo l'intero intervallo delle osservazioni. Si è già veduto che lo sviluppo di FOURIER effettuato in queste condizioni non ha significato fisico, e deve essere considerato solo come una rappresentazione puramente analitica. Ma, se si esaminano le successioni dei coefficienti dei termini dello sviluppo costituiti da seni o da coseni, oppure quella delle amplitudini delle varie armoniche, si constata nelle prime dei cambiamenti di segno e nella seconda delle punte, in corrispondenza dei medesimi numeri d'ordine. Questi sono i valori dei periodi cercati. Il procedimento, elegante e fecondo, è stato studiato in dettaglio da TURNER nel 1913 (2).

tra il valore del determinante e l'errore medio da cui esso è affetto, e osserva che tale rapporto diventa assai piccolo quando l'ordine k raggiunge il numero dei periodi componenti (vedi l'opera citata di STUMPF).

(1) Vedi F. BERNSTEIN, *Ueber die numerische Ermittlung verbogener Periodizitäten*, «Zeitsch. f. ang. Math. u. Mech.», dicembre 1927, pag. 441.

(2) Si supponga, ad esempio, che il fenomeno dato sia l'onda sinusoidale pura di periodo T rappresentata dall'equazione:

$$y = E \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{T} t + \varphi \right),$$

e si applichi lo sviluppo di FOURIER assumendo come fondamentale l'intervallo $(0, \Theta)$. Dalle [III] si ha, per. esempio:

$$a_s = \frac{2E}{\Theta} \int_0^\Theta \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{T} t + \varphi \right) \cdot \cos \frac{2\pi}{\Theta} s t \cdot dt, \quad (s = 1, 2, \dots)$$

da cui, con facili trasformazioni:

$$a_s = \frac{2E}{\pi} \frac{\frac{\Theta}{T}}{\left(\frac{\Theta}{T}\right)^2 - s^2} \cdot \operatorname{sen} \pi \frac{\Theta}{T} \cdot \operatorname{sen} \left(\pi \frac{\Theta}{T} + \varphi \right).$$

Esso può esser messo in relazione con i concetti fondamentali che hanno ispirato SCHUSTER nel 1898, originando il più elegante e intuitivo dei procedimenti fin qui ideati e applicati. SCHUSTER si è proposto di costruire per una funzione quasi periodica qualche cosa di analogo allo spettro luminoso, di cui le righe danno il valore dei periodi delle oscillazioni semplici costituenti la luce composta esaminata. E si è appoggiato, perciò, alle proprietà enunciate da BUYS-BALLOT mezzo secolo prima.

Questi ha, infatti, trovato, e la cosa è quasi intuitiva, che se n valori y , osservati in corrispondenza a tempi in progressione aritmetica, si suddividono in gruppi di p valori successivi ciascuno e poi si prendono le medie aritmetiche Y delle ordinate che occupano lo stesso posto in ogni gruppo parziale, i valori di tali medie differiscono pochissimo uno dall'altro se nella funzione considerata non esiste l'onda di periodo p o sottomultiplo di p , mentre presentano notevoli scarti nel caso in cui essa esista. Si può, allora procedere in diversi modi, il più semplice dei quali mi pare quello indicato da WHITTAKER nel 1911. Si calcolino i valori aritmetici μ e μ_p degli scostamenti quadratici medi degli n valori y e dei p valori Y , e se ne faccia il rapporto $\nu_p = \mu_p/\mu$. Facendo variare p in un certo intervallo, e quindi effettuando i corrispondenti raggruppamenti delle n osservazioni, si otterranno altrettanti valori del rapporto ν_p , e si potrà costruire un diagramma, riportandoli come ordinate mentre i numeri p si assumeranno come ascisse.

Se θ non è multiplo di T , e quindi $\frac{\theta}{T}$ non è intero, a_s cambia di segno quando s passa dal valore s_1 , uguale all'intero immediatamente precedente $\frac{\theta}{T}$, al valore $s_1 + 1$, uguale all'intero successivo, e di qui si può ricavare il valore del periodo T , compreso tra

$$\frac{\theta}{s_1} \text{ e } \frac{\theta}{s_1 + 1}.$$

Il procedimento si estende facilmente al caso di più onde sinusoidali componenti.

Questo metodo è stato esposto da H. H. TURNER in alcuni lavori pubblicati nelle « Monthly Notices » del 1913 e 1914.

Si viene così a costruire il *periodgram* di SCHUSTER, denominazione che noi potremmo tradurre in *ciclogramma*, o diagramma dei periodi, o anche, e forse meglio, *spettro* del fenomeno studiato. In causa dell'osservazione di BUYS-BALLOT, le ordinate di questo ciclogramma sono generalmente piccole, e assumono valori notevoli solo in corrispondenza delle ascisse p rappresentative dei periodi delle onde sinusoidali che si possono ritenere esistenti nel fenomeno; cosicchè le punte esistenti nel diagramma servono a numerare e contemporaneamente danno il valore numerico dei periodi.

SCHUSTER procede in maniera diversa, calcolando per ogni gruppo di medie Y corrispondente a un dato valore p , l'ampiezza dell'onda di periodo p che risulta dalle formule di FOURIER, e assumendo questo, o meglio ancora, il suo quadrato, come ordinata del ciclogramma. Si dimostra che il diagramma così costruito differisce poco da quello di WHITTAKER e che, naturalmente, le ascisse delle punte hanno i medesimi valori in entrambi (1).

(1) Siano $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$, i valori delle ordinate misurati a uguali intervalli δ della variabile indipendente t ; y_m la loro media aritmetica e μ il valore aritmetico dello scostamento quadratico medio corrispondente. Assunto il numero p , si costruisca lo specchio:

	y_0	y_1	y_{p-1}
	y_p	y_{p+1}	y_{2p-1}
[V]

Medie	$Y_0^{(p)}$	$Y_1^{(p)}$	$Y_{p-1}^{(p)}$

includendo in esso tutti i valori osservati y_s : quindi si determini la media aritmetica delle medie $Y_h^{(p)}$ scritte nell'ultima linea, e il valore aritmetico dello scostamento medio corrispondente μ_p . Infine, si calcoli il rapporto

$$v_p = \frac{\mu_p}{\mu}$$

Facendo variare p e calcolando i corrispondenti valori di v_p , si può costruire per punti la curva avente i valori di p come ascisse e quelli di v_p come ordinate. È questo il ciclogramma cercato (secondo WHITTAKER).

Ora, è facile vedere che il valore del rapporto v_p è un indice della periodicità. Infatti, la parte del fenomeno che è di periodo p , comparisce in tutte

CRAIG ha osservato, nel 1912, che il ciclogramma si può definire anche appoggiandosi al concetto di *correlazione*. È noto come PEARSON abbia per il primo stabilito un indice del grado di interdipendenza di due serie o successioni statistiche, introducendo il *coefficiente di correlazione*. Io non ne ripeterò qui la definizione, ma ricorderò solo che essa si può facilmente estendere al caso di più serie statistiche, cosicchè è possibile, per esempio, esprimere quanti-

le sue fasi in ogni linea dello specchio (V) e si presenta nella stessa fase, e quindi con il medesimo valore, in tutti i termini della medesima colonna e anche nella media Y corrispondente. Invece, la parte non periodica, o di periodi diversi da p , assume valori e segni diversi in corrispondenza dei vari termini y_s , e tende ad eliminarsi nelle medie. In conseguenza, il valore di μ_p (e quindi quello di ν_p) deve esser maggiore quando esiste l'onda di periodo p che quando essa manca.

E siccome si verifica (e si può anche mostrare analiticamente) che in prossimità del valore di un periodo, il valore di ν_p cresce (o decresce) rapidamente, mentre a distanza si mantiene basso e ha variazioni piuttosto lente, così si può concludere che i periodi delle onde sinusoidali componenti il fenomeno studiato sono i valori delle ascisse delle punte del ciclogramma relativo.

Il metodo di SCHUSTER è in relazione con quello di TURNER accennato nella nota (1) di pag. 11. Infatti, date le n ordinate y_s e costruiti gli specchi (V) e i valori $Y_h^{(p)}$, SCHUSTER calcola i coefficienti di FOURIER:

$$a_p = \frac{2}{p} \sum_{h=0}^{p-1} Y_h^{(p)} \cos \frac{2\pi}{p} h$$

$$b_p = \frac{2}{p} \sum_{h=0}^{p-1} Y_h^{(p)} \sin \frac{2\pi}{p} h$$

e assume come ordinata del periodgram il valore:

$$E_{(p)} = \sqrt{a_p^2 + b_p^2},$$

oppure il suo quadrato.

Vedi A. SCHUSTER, *Terrestrial Magnetism*, Baltimora, 1898; *The periodgram and its optical analogy*, Proc. of the Roy. Soc., London, 1906; *The periodicity of Sun-spots*, «Astroph. Journal», 1906.

E. T. WHITTAKER. *On the law which governs the variations of SS Cygni*, «Monthly Notices», 1911.

E. T. WHITTAKER a. G. ROBINSON, *The Calculus of Observations*. London, 1924.

tativamente la dipendenza di un fenomeno da altri due a mezzo del *coefficiente totale* di correlazione, ottenuto con una conveniente combinazione analitica dei tre *coefficienti parziali*, e cioè relativi ai tre diversi accoppiamenti che si possono formare con le tre serie statistiche date.

CRAIG ha verificato che, se si stabilisce la correlazione tra i valori osservati y delle ampiezze del fenomeno in esame e due successioni di seni e coseni di archi multipli di quello corrispondente al periodo p , il coefficiente totale di correlazione tra le y e le due classi trigonometriche ha valore proporzionale all'ordinata del ciclogramma di SCHUSTER. Questa nuova definizione estende il significato del diagramma, e ne accresce l'importanza speculativa e pratica. Pare probabile che a un risultato analogo si arrivi, adottando, come propone il MORTARA, invece del coefficiente o del rapporto di correlazione, altri indici del grado di dipendenza i quali evitino certe contraddizioni cui si va incontro con l'uso di quelli (1).

(1) Siano

$$\begin{aligned} X_1, X_2, \dots, X_n \\ Y_1, Y_2, \dots, Y_n \end{aligned}$$

due successioni statistiche di n termini; $M(X)$, $M(Y)$ le rispettive medie aritmetiche;

$$x_s = X_s - M(X) \quad , \quad y_s = Y_s - M(Y) \quad (s = 1, 2, \dots, n)$$

gli scarti corrispondenti;

$$\mu_X = \sqrt{\frac{[xx]}{n}} \quad , \quad \mu_Y = \sqrt{\frac{[yy]}{n}}$$

gli scostamenti quadratici medi.

Il *coefficiente di correlazione* r_{XY} tra le due successioni date è definito da:

$$r_{XY} = \frac{[xy]}{n \mu_X \mu_Y} = \frac{[xy]}{\sqrt{[xx][yy]}}$$

Se le successioni sono tre, con gli elementi X , Y , Z , e si calcolano nel modo sopra detto i tre *coefficienti parziali* r_{XY} , r_{YZ} , r_{XZ} , il coefficiente di correlazione totale r_X tra la successione X e le altre due Y , Z , è definito da:

$$r_X = \sqrt{\frac{r_{XY}^2 + r_{XZ}^2 - 2r_{XY} r_{XZ} r_{YZ}}{1 - r_{YZ}^2}}$$

Qualunque sia la definizione che si dà del ciclogramma, si verifica in esso l'esistenza di un certo numero di punte che non corrispondono a effettive periodicità. Ciò deriva dalla polidromia delle funzioni circolari inverse, e può facilmente constatarsi costruendo lo spettro di funzioni analitiche contenenti onde di periodi noti. Il carattere di queste, che SCHUSTER chiama *periodicità spurie*, si verifica constatando che le punte corrispondenti cambiano di posto al variare della durata delle osservazioni. Meglio ancora, esse possono venire eliminate ricorrendo all'ausiliario *diagramma delle fasi* di STUMPF, che mi accontenterò di nominare (1).

Queste formule si prestano a interessanti considerazioni geometriche.

Vedi i *Trattati di Statistica*, e A. TSCHUPROW, *Grundbegriffe und Grundprobleme der Korrelationstheorie*. Leipzig, 1925.

Nel nostro caso, la correlazione si stabilisce tra la successione data:

$$y) \quad y_1 \cdot y_2 \cdot \dots \cdot y_n$$

e le due successioni trigonometriche:

$$\begin{array}{l} u) \quad \cos \alpha, \cos 2\alpha, \dots, \cos n\alpha \\ v) \quad \text{sen } \alpha, \text{sen } 2\alpha, \dots, \text{sen } n\alpha, \end{array} \quad \alpha = \frac{2\pi}{p}$$

ottenendo:

$$\begin{aligned} r_{uv} &= 0, \\ r_{yu} &= \frac{a_p}{\sqrt{2}\mu_p} \\ r_{yv} &= \frac{b_p}{\sqrt{2}\mu_p}, \end{aligned}$$

e quindi:

$$r_y = \frac{E(p)}{\sqrt{2}\mu_p}, \quad \text{c. d. d.}$$

Vedi J. J. CRAIG, *The periodgram and method of correlation*, Rep. of the Dundee Meeting of the «British Ass. for the adv. of. Science», 1916; *A new method of discovering periodicities*. M. N. 76, 1916.

(1) Vedi K. STUMPF, op. cit., pag. 108.

Ma la parte più interessante di questo elegantissimo e fecondo metodo di SCHUSTER è forse il modo per giudicare con quale attendibilità le onde componenti determinate attraverso il ciclogramma si possano considerare realmente esistenti nel fenomeno. SCHUSTER prende in esame un movimento del tutto irregolare, determinato da n ordinate corrispondenti a valori equidistanti del tempo, e suppone che la probabilità che una di esse scelta a caso abbia un valore assegnato l , sia espressa dalla legge esponenziale di GAUSS, con una certa misura di precisione h . Appoggiandosi a un teorema di Lord RAYLEIGH, egli calcola quindi la probabilità che una ordinata del ciclogramma di quel fenomeno, scelta a caso, abbia un valore assegnato z , e trova che questa probabilità è proporzionale al prodotto di z per un esponenziale come quello di GAUSS, ma con misura di precisione $k = \sqrt{\frac{n}{2}} h$, notevolmente maggiore di h . Facendo variare z da zero a $+\infty$, la probabilità parte dal valore zero, raggiunge un massimo, e quindi diminuisce tendendo asintoticamente a zero.

L'ordinata media del ciclogramma, che, trattandosi di moto irregolare, e quindi non contenente periodicità, corrisponde alla intensità luminosa media di uno spettro continuo, si calcola facilmente, e risulta alquanto maggiore del valore più probabile dell'ordinata stessa. È a questa ordinata media che SCHUSTER dà il nome di *expectancy*, che si potrebbe forse tradurre in *aspettativa* o *attesa*, o, eventualmente anche *aspettanza*, alla lettera. Si calcola subito la probabilità che un'ordinata qualunque del ciclogramma del moto irregolare sia uguale a un multiplo assegnato q della *expectancy*, e, come è naturale, si verifica che essa probabilità decresce rapidamente al crescere di q : per esempio, per $q = 3$, la probabilità è circa uguale a 1/1000, per $q = 4$ è compresa fra 3 e 4 milionesimi, e così via.

Ciò posto, segue la regola: se in un ciclogramma qualsiasi si trova un'ordinata uguale, per esempio, a 4 volte la *expectancy*, la probabilità che il fenomeno da cui lo spettro deriva sia del tutto irregolare ha il valore di appena 3 o 4 milionesimi, o meglio, la probabilità che nel fenomeno studiato esista un'oscillazione di periodo

uguale all'ascissa della punta, differisce di soli 3 o 4 milionesimi dalla certezza (1).

Per citare un esempio, ricorderò lo studio del movimento del polo terrestre intorno alla sua posizione media sulla superficie della Terra, effettuato l'anno scorso da POLLAK. È noto che le misure di latitudine astronomica ripetute in vari luoghi hanno mostrato l'esistenza di uno spostamento del polo. Anche la teoria conduce allo stesso risultato, e già nel secolo XVIII, EULERO, supponendo la Terra perfettamente rigida, aveva trovato che l'asse della rotazione terrestre doveva descrivere nell'interno della Terra un piccolo cono con un periodo di circa 305 giorni. Ma non è questo il periodo risultante dalle osservazioni, perchè la Terra non è un corpo rigido, e da ciò il fenomeno trae una complicazione notevole. Molti studi teorici si son fatti di questo problema, e tra essi importantissimo quello geniale del nostro VOLTERRA. Ma necessitava e necessita seguire a lungo il cammino del polo per investigare le cause fisiche del moto e le sue modalità e fu per questa ragione che quasi quarant'anni fa, per iniziativa di un altro italiano, il FERGOLA, l'Associazione geodetica internazionale stabiliva di costituire un *Servizio internazionale delle latitudini* con un certo numero di stazioni funzionanti in continuità con strumenti e metodi uguali. Queste stazioni hanno tutte lavorato proficuamente e continuano a lavorare, ma si può asserire con legittima soddisfazione che nessuna ha superato per mole e precisione l'opera compiuta da quella italiana di Carloforte. I risultati delle osservazioni hanno finora confermato l'esistenza di un periodo di circa 430 giorni già dedotto da CHANDLER dallo studio di misure fatte nel secolo XIX, e mostrata probabile quella di un altro periodo di circa un anno. POLLAK ha voluto applicare il metodo di SCHUSTER ai risultati delle osservazioni fatte dal 1890 al 1924, e ha ritrovato i due periodi suddetti, constatando che la probabilità che essi siano dovuti al caso è rispettivamente di

(1) Vedi V. CONRAD, *Der Expektanzbegriff von A. SCHUSTER*, « Met. Zeitsch », 1924; K. STUMPF, op. cit., pag. 116; e inoltre: *Fehlertheoretische Untersuchungen zur Periodogrammanalyse*, « Ast. Nach », Bd. 226, 1926.

$2,3 \cdot 10^{-28}$, e di $3 \cdot 10^{-9}$; in modo che la loro realtà fisica è praticamente certa. Nessun altro periodo componente si presenta probabile (1).

Oltre ai metodi numerici e grafici, se ne sono elaborati e se ne elaborano anche di meccanici e fisici, che vanno dall'impiego degli analizzatori armonici, come quello di MADER e altri, all'uso dell'arpa di BALL; dal risonatore di GALITZIN ai periodografi ottici di DOUGLASS e di STUMPF. Questi ultimi sono apparecchi automatici che utilizzano lenti cilindriche e griglie o reticolati i quali ricordano i reticoli di ROWLAND. STUMPF eseguisce addirittura la registrazione fotografica del ciclogramma.

Tutti questi apparati, e altri ancora, stroboscopici e cinematografici, meriterebbero una dettagliata descrizione, perchè, oltre ad essere assai utili, mettono in evidenza tanti punti importanti che le teorie sfiorano appena e i metodi numerici non fanno scorgere. Ma le notevoli difficoltà insite in una trattazione di questo genere, e il timore di abusare della pazienza del cortese uditorio, mi inducono ad accontentarmi della citazione (2).

Neppure mi posso fermare sulle applicazioni, nè su altri importantissimi studi, quasi tutti derivati o affiancati al metodo di SCHUSTER, ma generalmente ancora in elaborazione, come l'analisi con suddivisione in gruppi, l'analisi di osservazioni con lacune, l'introduzione di moti componenti smorzati ecc.

Dirò solo che a questi, elevati e difficili sotto il punto di vista matematico, ma aventi uno scopo pratico, si collegano gli studi teorici sugli spettri delle funzioni quasi periodiche e dei movimenti irregolari, che, iniziati non molti anni sono da BURKHARDT, ESCLANGON, BOHL, vengono ora sviluppati e proseguiti da altri valenti matematici, tra i quali cito l'americano WIENER. Come sempre, è difficile dire quale sarà il contributo che queste ricerche teoriche porteranno al problema pratico dell'analisi periodale, come è difficile prevedere quali nuovi problemi le indagini sperimen-

(1) Vedi L. W. POLLAK, *Das Periodogramm der Polbewegung*, « Gerlands Beiträge zur Geophysik », Bd. XVI, 1927.

(2) Vedi K. STUMPF, op. cit., sopra Cap. V.

tali e statistiche porranno al matematico nel prossimo avvenire. Una cosa sola è certa; e cioè, che la collaborazione continuerà fraterna come per il passato e darà risultati di sempre maggiore importanza teorica e utilità pratica. E mi sia concesso di esprimere l'augurio che anche in questo campo, come già in altri importantissimi del calcolo delle probabilità, della Statistica e della Economia, la scienza italiana porti un contributo degno della nostra storia, e corrispondente alla posizione che l'Italia desidera e merita di conquistarsi nel mondo.



Corporate Heritage
& Historical Archive

POSSIBILITÀ DI CALCOLO NUMERICO
NEI PROBLEMI CONTINUI DI MATEMATICA ATTUARIALE

(*Conferenza del Prof. Mauro Picone*) (*).

Invitato dall'onorevole Presidente di questo grandioso Istituto che onora l'Italia ad aggiungere una mia alla brillante catena delle conferenze che hanno preceduto la presente ho, nonostante la piena coscienza della mia pochezza, accolto ben volentieri l'onorifico e lusinghiero incarico. Ho accettato anzi con entusiasmo, pensando anche che veniva a presentarsi una bella occasione di contatto fra un cultore di scienza pura e insigni cultori di scienza applicata.

È vero che in quest'occasione la fortuna è tutta del cultore di scienza pura, ma, nondimeno, essa rappresenta sempre un inizio che potrebbe, se meglio continuato e sviluppato con una ben meditata organizzazione, avere utili conseguenze e per la matematica pura e, nel caso presente, per le sue importanti applicazioni alla scienza attuariale.

Le teorie più belle e più fondamentali della matematica sono sorte nello studio dei problemi di applicazione. Esse hanno poi, per loro conto, progredito smisuratamente, nell'infessato silenzioso lavoro di tavolino del matematico puro, a prescindere da ogni applicazione e allontanandosene bene spesso in tale maniera che il pratico, non ravvisandovi più nulla di utile alle sue cose, ha finito col dimenticare e perfino con l'ignorare il matematico. Si è andato così creando — specialmente in Italia, ed è doloroso il doverlo riconoscere nella patria di Archimede, di Leonardo, di Galileo — un profondo abisso che separa il matematico puro dalla svariata folla di coloro che fanno applicando la matematica.

(*) Tenuta il giorno 4 giugno 1928.

Il fisico, il chimico, l'ingegnere, l'attuario, l'economista, lo statista ben di rado ricorrono alla collaborazione del matematico puro; questi, d'altro canto, generalmente, ignora i problemi che, spesso invano, affaticano le menti di quelli e alla risoluzione nonchè alla precisazione dei quali problemi potrebbe decisamente e brillantemente contribuire (fulgidissimi esempi: la relatività, la fisica atomica,...) e, dimenticato da Dio e dagli uomini fra le quattro pareti del suo studio, impiega il tempo, che pur deve impiegare, e le sue arti potenti e raffinate di analista a risolvere complicatissimi problemi che gli va ponendo la sua testa e dei quali però nessuno si è mai sognato di domandargli la soluzione.

È questa la dolorosa situazione d'oggi della matematica pura rispetto alle scienze applicate. Ed in alcuni ambienti le cose sono arrivate a tal punto che, per esempio, parlando giorni or sono con un illustre professore (di fisica) di un mio bravo scolaro che, volendo dedicarsi alla scienza dell'ingegnere, si proponeva di conseguire dapprima la laurea in matematica, mi sentii dire: « È da temere che quel giovane arrivi così agli studi d'ingegneria con la testa guasta ».

Ma sopra la sponda dell'abisso, di cui ho parlato sopra, occupata dai matematici puri, ne sorge oggi qua e là qualcuno che non si stanca di lanciare segnali di richiamo alla folla dell'altra sponda. Essi chiedono a gran voce che si getti loro un ponte per passare e venire a dare il loro fervido contributo al progresso delle scienze applicate. Essi hanno fede gagliarda sulla potenza di tale contributo ed hanno già lavorato, spesso con successo, sempre con tenacia, a rendere praticamente attuabili le formole risolutive di quei problemi di cui da gran tempo i cultori di scienze applicate avevano domandato la soluzione ai matematici, ricevendone però quasi sempre in passato risposte incomprensibili e formole non valutabili quantitativamente.

Io vi dichiaro che appartengo all'esigua schiera di quei coraggiosi matematici. Ciò vi dirà con quanta gioia io sia saltato sul ponte che ha voluto gettarmi il vostro onorevole Presidente, invitandomi a venire fra voi a parlarvi della possibilità della traduzione numerica delle formole di matematica attuariale, e con quanto calore io lo ringrazi per ciò.

* * *

Nella matematica attuariale si incontrano sovente importanti problemi la cui soluzione dipende da *tutti* i valori, nessuno eccettuato, che una certa variabile può assumere in un dato intervallo. Tali problemi diconsi *continui*, con allusione alla continuità con cui può variare l'indicata variabile. Per esempio, nella soluzione del seguente problema, indicatomi dal Prof. CANTELLI:

PROBLEMA A) — *determinare il premio unico puro per l'assicurazione di un capitale di una lira, da pagare all'istante della morte di una testa (x),*

si deve considerare che la testa (x) può morire in un qualunque istante dell'intervallo di tempo (x, ω), limitato inferiormente dall'età x della testa (x) e superiormente dall'età ω massima possibile.

Le formole risolutive degli indicati problemi continui si esprimono per mezzo di *integrali* che operano su funzioni spesso complicatissime. L'attuario pensa alla difficoltà insormontabile del calcolo numerico di questi integrali, della quale sentì sempre parlare, com'è d'uso, anche quando era nei banchi dell'Università, fin dall'inizio della conoscenza dell'integrale, e perciò, rigettando quelle formole, si ingegna ad approssimare la soluzione del problema continuo sostituendo ad esso un altro discreto ed interpolando poi più o meno opportunamente. Ei perviene però così ad un risultato del quale ignora e non può che ignorare l'ordine d'approssimazione.

Ora io sarei pago se dal mio discorso scaturisse la prova, per tutti i miei uditori, che oggi, con l'uso delle potenti macchine calcolatrici che voi ben conoscete e di cui avete dovizia nei vostri uffici, *non vi è più nessuna difficoltà al calcolo numerico di un integrale che operi sulla più complicata delle funzioni, potendo anche conseguire il risultato con quel numero di cifre intiere e decimali esatte che più piaccia di prestabilire.*

Vi proverò la mia affermazione trattando il problema A) sopra enunciato; dopo di che si dovrebbe, io spero, concludere

da tutti che le formole risolutive dei problemi continui della matematica attuariale sono anch'esse perfettamente utilizzabili nella pratica corrente degli uffici di calcolo delle compagnie d'assicurazione.

* * *

So che fra voi mi fan l'onore d'ascoltarmi anche molti che non conoscono affatto cosa sia l'integrale di una funzione, e siccome vorrei essere chiaro a tutti ed è poi ben desiderabile che

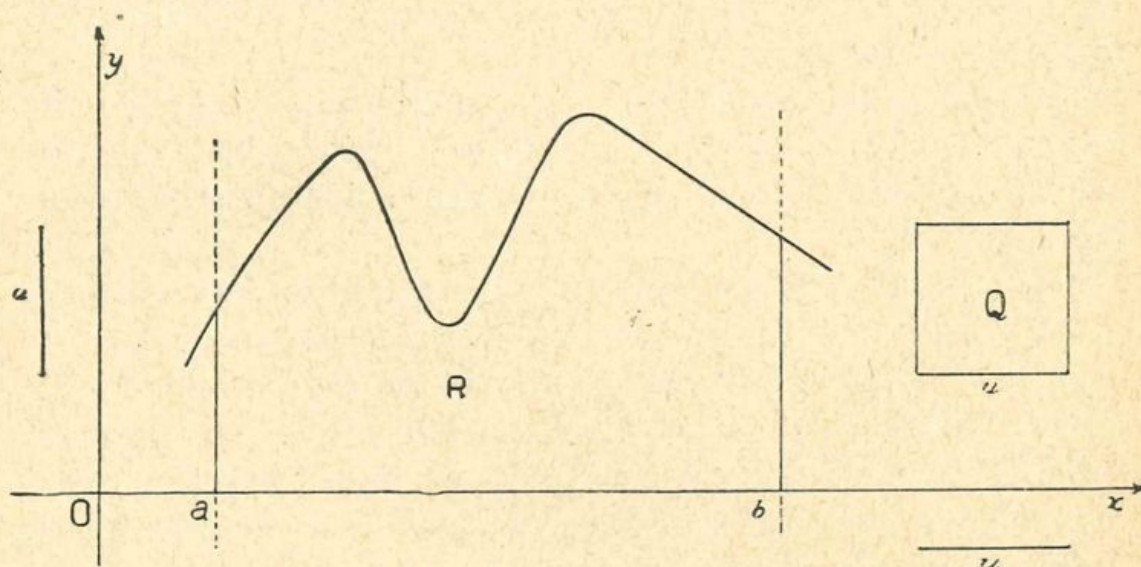


Fig. 1.

anche coloro che negli uffici sono adibiti esclusivamente al calcolo delle formole, sappiano – per render sempre possibile un sicuro controllo – il significato dei simboli in esse contenuti, comincerò dallo stabilire il modesto concetto d'integrale.

Sia $f(x)$ una funzione definita al variare di x nell'intervallo (a, b) , funzione che ci limiteremo a supporre positiva. Tracciati sul foglio da disegno due assi coordinati ortogonali x e y , e fissata una certa unità di misura u delle lunghezze, disegniamo il grafico C della funzione. La regione R (v. fig. 1) del piano, limitata dall'asse x , dalle perpendicolari a questo asse nei punti a e b e dal grafico C chiamasi *rettangoloide relativo alla funzione $f(x)$* ,

avente per base l'intervallo (a, b) . Ebbene, l'integrale della funzione $f(x)$ esteso all'intervallo (a, b) , che denotasi col simbolo

$$[1] \quad \int_a^b f(x) dx,$$

non è altro che l'area del rettangoloide R relativo alla funzione, avente per base l'intervallo (a, b) . Per ragioni di tempo devo rinunciare a esporvi la non semplice genesi del simbolo [1] e vi prego pertanto di prenderlo così com'è, come un simbolo, ben capriccioso, indicante l'area di R .

Si può però domandare: Cosa deve intendersi per *area* della regione piana R ?

Si risponde immediatamente così: Immaginate di ritagliare il rettangoloide R e il quadrato Q (v. fig. 1), avente per lato l'unità di misura u , da una lamina di latta sottilissima perfettamente omogenea e di spessore costante; ebbene, l'area di R non è altro che il rapporto fra il peso del pezzo di lamina ritagliato per il rettangoloide R e quello ritagliato per il quadrato Q .

Ecco dunque che ora conoscete tutti perfettamente il significato numerico del simbolo [1] e avete anche un mezzo per calcolarne il valore. I vostri strumenti di calcolo sono: le forbici, la lamina di latta e la bilancia.

Integrare vuol dire calcolare l'integrale di una funzione. Voi tutti dunque sapete ora integrare e non disdegnate i mezzi di integrazione che vi ho indicato, essi sono quelli di cui si serviva Galileo che, con essi, riuscì ad avere per primo, si può dire esattamente, l'area della cicloide.

Ma per i vostri frequentissimi calcoli non sarebbe certo consigliabile l'uso sistematico degli strumenti di Galileo! Con essi, fra le altre cose, rimarrebbe sempre un'incognita l'ordine dell'approssimazione conseguita, e di ciò è ben facile persuadersi.

Ora io vorrei arrivare a dimostrarvi che la macchina calcolatrice col concorso di una famosa formola dovuta al matematico italiano CAVALIERI, ma più nota sotto il nome di formola di SIMPSON, consente, in ogni caso, un rapido calcolo approssimato — praticis-

simo anche dal punto di vista dal quale dovete mettervi voi — dell'integrale di una qualunque funzione $f(x)$, con un prestabilito numero di cifre decimali esatte. Secondo la menzionata formola, che diremo di CAVALIERI-SIMPSON, un valore approssimato dell'area del rettangoloide R , relativo alla funzione $f(x)$ e di base (a, b) , è dato da

$$[2] \quad \frac{b-a}{6} [f(a) + 4f(c) + f(b)] \quad , \quad c = \frac{a+b}{2} \quad ,$$

ove c designa l'ascissa del punto di mezzo dell'intervallo (a, b) . Si dimostra in analisi infinitesimale che l'errore

$$[3] \quad \rho = \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{6} [f(a) + 4f(c) + f(b)] \quad ,$$

che si commette dando all'area di R il valore approssimato [2], è in valore assoluto minore di

$$[4] \quad L (b-a)^5 \quad ,$$

ove L è una costante che dipende soltanto dalla funzione $f(x)$ e per nulla degli estremi a e b dell'intervallo.

A coloro che conoscono il calcolo infinitesimale ricorderò che si può porre

$$L = \frac{M}{2880} \quad ,$$

ove M designa un numero positivo non superato in (a, b) dal valore assoluto della derivata quarta di $f(x)$ (1). Ma, come vedremo, non è proprio indispensabile conoscere L .

La quantità [4], della quale l'errore ρ si mantiene in valore assoluto minore, decresce rapidamente, com'è evidente, al diminuire dell'ampiezza $b-a$ dell'intervallo (a, b) ; pertanto, conside-

(1) Cfr., per esempio, le mie *Lezioni d'Analisi infinitesimale*. (Catania, Circolo matematico, R. Università), vol. I, pag. 593.

rato che dividendo l'intervallo (a, b) in parti, la somma delle aree dei rettangoloidi relativi alla funzione $f(x)$ e aventi per basi ciascuna di queste parti, dà l'area di R , si offre spontaneo il seguente procedimento per il calcolo approssimato dell'integrale [1]: Si divide l'intervallo (a, b) in piccole parti, si dà all'area di ogni rettangoloide avente per base ognuna di queste parti il valore approssimato fornito dalla formola di CAVALIERI-SIMPSON, e si fa la somma di tali valori.

Ma dobbiamo domandarci: Di che entità è l'errore d'approssimazione che si commette applicando tale procedimento? Risponderemo subito nell'ipotesi che si sia diviso l'intervallo (a, b) in parti eguali.

Presi comunque due punti x' e x'' di (a, b) , denoteremo con $R(x', x'')$ il rettangoloide relativo alla funzione $f(x)$ e avente per base l'intervallo (x', x'') . Mediante i punti

$$\alpha_0 = a, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n = b,$$

dividiamo l'intervallo (a, b) in n parti eguali e diciamo $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ rispettivamente le ascisse dei punti di mezzo degli intervalli parziali $(\alpha_0, \alpha_1), (\alpha_1, \alpha_2), \dots, (\alpha_{n-1}, \alpha_n)$. Si ha:

$$\int_a^b f(x) dx = \text{area } R = \sum_{k=1}^n \text{area } R(\alpha_{k-1}, \alpha_k),$$

e quindi, per quanto abbiamo già visto,

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k - \alpha_{k-1}}{6} [f(\alpha_{k-1}) + 4f(\beta_k) + f(\alpha_k)] \right| = \\ & = \left| \sum_{k=1}^n \text{area } R(\alpha_{k-1}, \alpha_k) - \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k - \alpha_{k-1}}{6} [f(\alpha_{k-1}) + 4f(\beta_k) + f(\alpha_k)] \right| \leq \\ & \leq \sum_{k=1}^n \left| \text{area } R(\alpha_{k-1}, \alpha_k) - \frac{\alpha_k - \alpha_{k-1}}{6} [f(\alpha_{k-1}) + 4f(\beta_k) + f(\alpha_k)] \right| \leq \\ & \leq L \sum_{k=1}^n (\alpha_k - \alpha_{k-1})^5. \end{aligned}$$

Ma $\alpha_k - \alpha_{k-1} = (b - a)/n$, e quindi

$$L \sum_{k=1}^n (\alpha_k - \alpha_{k-1})^5 = \frac{L(b-a)^5}{n^4}.$$

Si ha dunque che: Se per valore dell'integrale [1] si prende la somma:

$$\begin{aligned} [5] \quad S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k - \alpha_{k-1}}{6} [f(\alpha_{k-1}) + 4f(\beta_k) + f(\alpha_k)] = \\ &= \frac{b-a}{6n} \{ f(a) + f(b) + 2[f(\alpha_1) + f(\alpha_2) + \dots + f(\alpha_{n-1})] + \\ &\quad + 4[f(\beta_1) + f(\beta_2) + \dots + f(\beta_{n-1}) + f(\beta_n)] \}, \end{aligned}$$

si commette un errore ρ_n il cui valore assoluto verifica la limitazione

$$[6] \quad |\rho_n| \leq \frac{L(b-a)^5}{n^4}$$

Il procedimento di calcolo dell'integrale [1], fondato sulla formola CAVALIERI-SIMPSON, consiste appunto, di solito, nel calcolare l'espressione S_n data dalla [5] per valori via via crescenti di n . L'errore ρ_n che si commette nell'attribuire all'integrale il valore di S_n decresce al crescere di n e più precisamente, come asserisce la [6], decresce almeno proporzionalmente alla quarta potenza di $1/n$. Decresce dunque assai rapidamente, e da ciò la grande praticità del procedimento.

L'esempio che segue può assai efficacemente contribuire a guadagnare la vostra fiducia nel metodo di calcolo che vi ho esposto.

Tutti sanno che l'area del cerchio di raggio *uno* vale

$$\pi = 3,14159 \dots$$

Se inscriviamo nel cerchio un poligono regolare di n lati, esso cerchio riesce decomposto in tale poligono e negli n segmenti circolari determinati da ciascun lato del poligono. Ognuno di tali

segmenti può ben riguardarsi come un rettangoloide avente per base il lato del poligono, le cui ordinate estreme sono nulle, mentre quella di mezzo vale

$$1 - \cos \frac{180^\circ}{n} .$$

Se si riflette che il lato del poligono è misurato da

$$2 \operatorname{sen} \frac{180^\circ}{n} ,$$

la formola CAVALIERI-SIMPSON viene ad attribuire ad un tale segmento l'area approssimata

$$[7] \quad \frac{4}{3} \operatorname{sen} \frac{180^\circ}{n} \left(1 - \cos \frac{180^\circ}{n} \right) ;$$

pertanto, se aggiungiamo all'area

$$n \operatorname{sen} \frac{180^\circ}{n} \cos \frac{180^\circ}{n} ,$$

del poligono inscritto, n volte la quantità [7], troviamo come valore approssimato dell'area del cerchio:

$$[8] \quad a_n = n \operatorname{sen} \frac{180^\circ}{n} \cos \frac{180^\circ}{n} + n \frac{4}{3} \operatorname{sen} \frac{180^\circ}{n} \left(1 - \cos \frac{180^\circ}{n} \right) = \\ = \frac{n}{6} \left(8 \operatorname{sen} \frac{180^\circ}{n} - \operatorname{sen} \frac{360^\circ}{n} \right) .$$

Ora un effettivo calcolo di a_n fornisce:

per $n = 2,$	$a_2 = 2,666$...
per $n = 4,$	$a_4 = 3,104$...
per $n = 8,$	$a_8 = 3,139$...
aer $n = 16,$	$a_{16} = 3,1414$...
per $n = 30,$	$a_{30} = 3,14159$

Si vede dunque come, assai rapidamente, al crescere di n , cioè al diminuire delle lunghezze delle basi dei considerati rettangoloidei, la quantità a_n si avvicini al valore π dell'area del cerchio. Si

può dire anzi che la [8] fornisce, per n crescente, un buon metodo elementare per il calcolo approssimato di π . Posto infatti, per esempio, $n = 2^m$, si ha

$$a_n = \frac{2^{m-1}}{3} \left(8 \operatorname{sen} \frac{180^\circ}{2^m} - \operatorname{sen} \frac{180^\circ}{2^{m-1}} \right),$$

laddove il seno di $\frac{180^\circ}{2^m}$ può calcolarsi per via elementare.

Nell'esempio considerato si vede che per $n = 4$, si ottengono le due cifre 3 e 1 di a_n che rimangono immutate per i successivi valori di n , per $n = 16$ le quattro cifre 3, 1, 4 e 1 che rimangono immutate per i successivi valori di n , ecc. Ora queste cifre sono precisamente le cifre esatte del numero π che si vuol calcolare. Ebbene, è lecito, per induzione, formulare la regola seguente, alla quale conviene attenersi, nell'impiego dell'espostovi metodo di integrazione:

Si inizi il calcolo dell'espressione S_n data della [5] per un certo conveniente valore n_0 di n e lo si ripeta per i valori n_1 , n_2 , ... , n_s , del pari convenienti, di n , via via crescenti; conseguita, a cominciare dalla sinistra, la stabilità, al crescere di n , di un certo primo gruppo di cifre di S_n , si deve presumere che tutte le cifre di questo gruppo siano le esatte per l'integrale che si vuol calcolare.

Tale regola, sia pure empirica, ci permette di ignorare il numero L che entra nel secondo membro della [6]. In applicazione di essa, se, dunque, si deve calcolare l'integrale con un prefissato numero di cifre consecutive, a cominciare dalla sinistra, esatte, si ripeterà il calcolo della S_n per valori via via crescenti di n :

$$[9] \quad n_0, n_1, n_2, \dots, n_s, \dots,$$

arrestandoci non appena si sia accertata la stabilità, al crescere di n , del prescritto numero di cifre. L'impiego della macchina calcolatrice consente appunto un calcolo rapidissimo e controllabile della S_n per valori di n comunque grandi.

Se poi si conoscesse il numero L (che potrebbe essere dato ai calcolatori dagli auttarii matematici della Compagnia) volendo l'integrale con le prime cifre esatte fino a quella inclusa dall'ordine ν (ν positivo, negativo o nullo) si potrà, in base alla [6], dare ad n il più basso valore intero e positivo per cui riesce

$$\frac{L(b-a)^5}{n^4} < 10^{\nu-1},$$

cioè

$$n > \sqrt[4]{\frac{L(b-a)^5}{10^{\nu-1}}}.$$

In tal modo però, mentre si ottiene la matematica sicurezza dell'esattezza delle prime cifre fino a quella inclusa dell'ordine ν , si perviene, in generale, a valori molto alti di n , molto più alti di quelli a cominciare dai quali, percorrendo una successione come la [9] di valori crescenti di n , si consegue nella S_n la stabilità delle cifre indicate. Ora i valori molto alti di n presentano l'inconveniente del calcolo di molte ordinate della curva $y = f(x)$.

* * *

Passiamo ora a dare il calcolo della formola risolutiva del problema A) di matematica attuariale enunciato in principio. Assumeremo come legge di sopravvivenza relativa ad una determinata collettività di persone, quella di GOMPertz-MAKEHAM, secondo la quale di un determinato numero N di individui nati contemporaneamente ne sopravvivono ad un età x non inferiore a anni 28 un numero dato dalla formola

$$[10] \quad l_x = K_N s^x g^{(c^x)} \quad (x \geq 28) .$$

Secondo il *Text Book* dell'« Institute of Actuaries » per le costanti s , g , c , si ha

$$\log_{10} s = \bar{1},997310673 \dots ,$$

$$\log_{10} g = \bar{1},9995432 \dots ,$$

$$\log_{10} c = 0,03965686 \dots .$$

Prenderemo il tasso d'interesse $i = 0.05$ e porremo

$$\delta = \log_e (1 + i) = 0,0487902 \dots$$

In matematica attuariale, basandosi sulla [10] e facendo ricorso al calcolo delle probabilità, si dimostra che:

1° l'annualità vitalizia continua su di una testa di età $x (\cong 28)$ è data da

$$[11] \quad \bar{a}_x = \int_0^{100-x} s^t g^{c^x (c^t - 1)} \frac{dt}{(1+i)^t} = \int_0^{100-x} \sigma^t \rho_x^{(c^t - 1)} dt,$$

ove

$$\sigma = \frac{s}{1+i}, \quad \rho_x = g^{(c^x)};$$

2° il premio unico puro per l'assicurazione di un capitale unitario, da pagare all'istante della morte di una testa d'età $x (\cong 28)$ è dato da:

$$[12] \quad \bar{A}_x = 1 - \delta \bar{a}_x.$$

Calcolando dunque \bar{a}_x avremmo subito, per la [12], anche \bar{A}_x . Faremo il calcolo per $x = 28$. Si ha:

$$\begin{aligned} \log_{10} \sigma &= -0,0238786 \dots, \\ \log_{10} \rho_{28} &= -0,0058900 \dots. \end{aligned}$$

Il calcolo della funzione

$$[12] \quad y = \sigma^t \rho_{28}^{(c^t - 1)},$$

che bisogna integrare nell'intervallo (0.72) per avere \bar{a}_{28} si ottiene rapidamente, per i vari valori di t , al modo seguente. Si calcolano dapprima, con l'uso della tavole logaritmiche, i valori di $c^t - 1$, poscia i valori di

$$\log y = \log \left[\sigma^t \rho_{28}^{(c^t - 1)} \right] = t \log \sigma + (c^t - 1) \log \rho_{28},$$

ciò che si consegue in un momento con la macchina calcolatrice, e infine si desumono i valori di y dalle tavole dei logaritmi.

I risultati del calcolo per i valori di t da 0 a 72 equintervallati di 2 in 2, sono riportati nella tabella della pagina seguente, ove figurano scritte soltanto le cifre decimali esatte.

Per il calcolo approssimato dell'integrale

$$[13] \quad \bar{a}_{28} = \int_0^{72} \sigma^t \rho_{28}^{(c^t - 1)} dt,$$

calcoleremo l'espressione S_n data dalla [5] per la funzione [12] per i valori

$$n = 1 \quad , \quad n = 2 \quad , \quad n = 6 \quad , \quad n = 9 \quad , \quad n = 18 \quad .$$

La macchina calcolatrice fornisce immediatamente la seguente tabella dei valori di S_n .

n	S_n
1	16,6754832
2	15,7894848
3	15,7476608
6	15,7283980
9	15,7274277
18	15,7272055

L'esame di questa tabella dice subito che: Per $n \cong 2$ si è conseguita la stabilità delle prime tre cifre di S_n , per $n \cong 6$ la stabilità delle prime quattro cifre, per $n \cong 9$ la stabilità delle prime cinque. Si può dunque dire che il numero

$$[14] \quad 15,7272055$$

dà il valore dell'integrale [13] esprimente \bar{a}_{28} con esatte le cifre fino a quella inclusa dei millesimi. Pertanto il numero

$$1 - \delta \times 15,7262055 = 0,2326696$$

dà il valore del premio unico richiesto \bar{A}_{28} con esatte le cifre fino a quella inclusa dei decimillesimi.

$$y = \sigma^t \rho_{28}^{(c^t - 1)}$$

<i>t</i>	<i>c^t - 1</i>	log <i>y</i>	<i>y</i>
0	0,0000	0,0000000	1,0000000
2	0,2004	1,9510625	0,8934341
4	0,4409	1,9018887	0,7977900
6	0,7296	1,8524311	0,7119200
8	1,0761	1,8026330	0,6347942
10	1,4921	1,7524255	0,5654900
12	1,9915	1,7017269	0,5031840
14	2,5908	1,6504398	0,4471360
16	3,3103	1,5984448	0,3966841
18	4,1740	1,5456004	0,3512571
20	5,2106	1,4917376	0,3102684
22	6,4551	1,4366503	0,2733067
24	7,9488	1,3800952	0,2399358
26	9,7418	1,3217772	0,2097868
28	11,8941	1,2613430	0,1825336
30	14,4777	1,1983684	0,1578950
32	17,5789	1,1323451	0,1356266
34	21,3015	1,0626618	0,1155213
36	25,7702	2,9885840	0,0974056
38	31,1337	2,9092357	0,0811401
40	37,5722	2,8235558	0,0666125
42	45,3008	2,7302771	0,0537374
44	54,5778	2,6278784	0,0424500
46	65,7138	2,5145301	0,0326986
48	79,0810	2,3880401	0,0244366
50	95,1265	2,2457749	0,0176106
52	114,3870	2,045734	0,0121500
54	137,5066	3,9006417	0,0079550
56	165,2586	3,6894253	0,0048913
58	198,5707	3,4454598	0,0027891
60	238,5585	3,1621745	0,0014527
62	286,5579	4,8317008	0,0006787
64	344,1748	4,4445800	0,0002783
66	413,3360	5,9894634	0,0000976
68	496,3549	5,4527249	0,0000284
70	596,0080	6,8180109	0,0000066
72	715,6282	6,0656907	0,0000012

* * *

Ma mi è proprio lecito, basandomi soltanto sulle considerazioni di natura intuitiva che ho potuto fare, chiedervi tanta fiducia sull'esattezza del risultato [14] del mio calcolo? Non vi sono mezzi per un rapido controllo — assolutamente sicuro — del risultato di un calcolo d'integrazione come quello che vi ho mostrato? Ve ne sono svariati. I conoscitori del calcolo infinitesimale ne potrebbero trovare di valevoli in ogni caso nel citato mio libro d'Analisi.

Nel caso particolare da me considerato siamo però per fortuna in grado di dare subito un soddisfacente controllo. La già costruita tabella dei valori di y e la macchina calcolatrice ce lo consentono *immediatamente*. Ed ecco in che modo.

Se disegnate il diagramma della funzione y , data dalla [12], nell'intervallo $(0,72)$ trovate una curva del tipo di quella della fig. 2, la quale volge costantemente la concavità nel verso positivo dell'asse y (1). Dividiamo l'intervallo $(0,72)$ in n parti eguali mediante i punti $\alpha_0 = 0$, α_1 , α_2 , ..., $\alpha_n = 72$ e dette β_1 , β_2 , ..., β_n le ascisse dei punti di mezzo dei segmenti parziali (α_0, α_1) , (α_1, α_2) , ..., (α_{n-1}, α_n) , diciamo P_0 , P_1 , ..., P_n i punti della curva (vedi fig. 2) di ascissa α_0 , α_1 , ..., α_n e Q_1 , Q_2 , ..., Q_n quelli di

(1) Ciò si può rigorosamente dimostrare al modo seguente. Se si calcola la derivata seconda della y si trova:

$$y'' = [c^{2t}(\log \rho \log c)^2 + c^t \log \rho \log c \log(c\sigma^2) + (\log \sigma)^2] y .$$

Ora il discriminante del trinomio di secondo grado in c^t

$$c^{2t}(\log \rho \log c)^2 + c^t \log \rho \log c \log(c\sigma^2) + (\log \sigma)^2 ,$$

vale

$$(\log \rho)^2 (\log c)^2 (4 \log \sigma + \log c) ,$$

ed è quindi negativo, per essere

$$\log c > 0 , \quad 4 \log \sigma + \log c < 0 .$$

Il detto trinomio è perciò sempre positivo. Sarà dunque sempre $y''(t) > 0$, e ciò dimostra quanto si voleva.

ascissa $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$. Evidentemente il rettangoloide R' avente per base l'intervallo $(0, \beta_n)$ e relativo alla poligonale di vertici

$$P_0, Q_1, P_1, Q_2, P_2, \dots, P_{n-1}, Q_n, P_n,$$

inscritto alla curva, contiene il rettangoloide R relativo alla funzione y , avente lo stesso intervallo base. Dovrà dunque risultare

$$[15] \quad \text{area } R' > \text{area } R = \int_0^{\beta_n} y \, dx.$$

Se nei punti Q_1, Q_2, \dots, Q_n conduciamo le tangenti alla curva, vediamo che queste giacciono al disotto di essa; pertanto

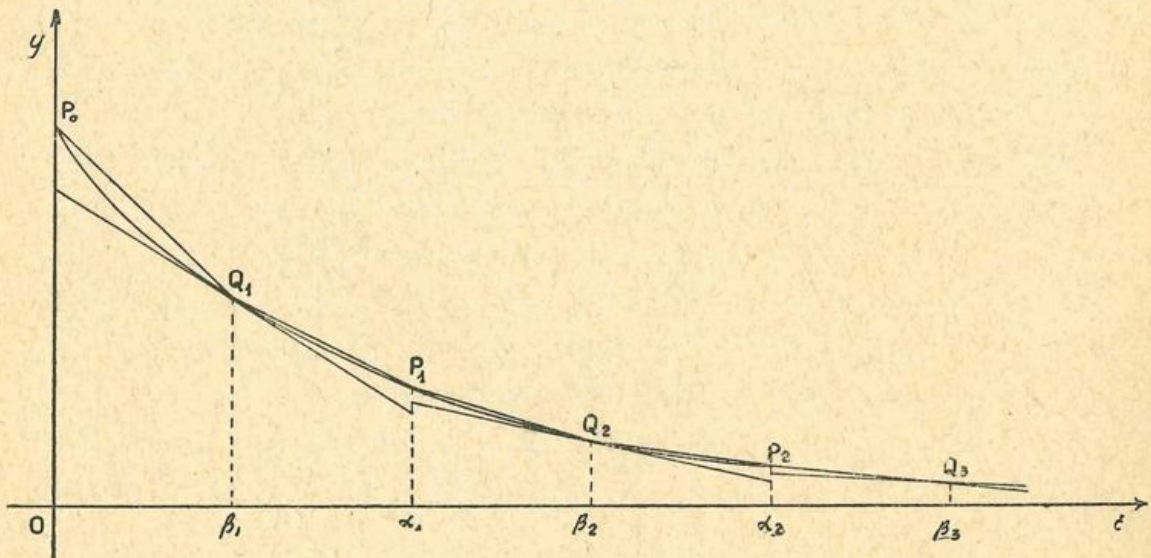


Fig. 2.

il rettangoloide R_1 (è un trapezio) relativo alla tangente in Q_1 , alla curva, avente per base l'intervallo (α_0, α_1) , è totalmente contenuto nel rettangoloide R , e così tutti i rettangoloidi R_2, R_3, \dots, R_n relativi, rispettivamente, alle tangenti in Q_2, Q_3, \dots, Q_n alla curva, aventi per basi gl'intervalli $(\alpha_1, \alpha_2), (\alpha_2, \alpha_3), \dots, (\alpha_{n-1}, \alpha_n)$ sono contenuti nel rettangoloide R . Si avrà dunque

$$[16] \quad \text{area } R = \int_0^{\beta_n} y \, dx > \text{area } R_1 + \text{area } R_2 + \dots + \text{area } R_n.$$

Detti y_0, y_1, \dots, y_n i valori di y nei punti $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ e $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ quelli nei punti $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, si ha

$$\begin{aligned} \text{area } R' &= \frac{72}{2n} \left(\frac{y_0 + \eta_1}{2} + \frac{\eta_1 + y_1}{2} + \dots + \frac{y_{n-1} + \eta_n}{2} + \frac{\eta_n + y_n}{2} \right) = \\ &= \frac{72}{4n} (y_0 + 2\eta_1 + 2y_1 + \dots + 2y_{n-1} + 2\eta_n + y_n), \end{aligned}$$

$$\text{area } R_1 + \text{area } R_2 + \dots + \text{area } R_n = \frac{72}{n} (\eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_n).$$

Se ne deduce dunque, dalla [14] e dalla [15],

$$\begin{aligned} \frac{72}{n} (\eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_n) &< \int_0^{72} y dx < \frac{72}{4n} (y_0 + 2\eta_1 + 2y_1 + \dots + \\ &+ 2y_{n-1} + 2\eta_n + y_n). \end{aligned}$$

Per $n = 18$, dalla tabella dei valori di y si ricava immediatamente

$$[17] \quad \frac{72}{n} (\eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_n) = 15,6897628$$

$$[18] \quad \frac{72}{4n} (y_0 + 2\eta_1 + 2y_1 + \dots + 2y_{n-1} + 2\eta_n + y_n) = 15,7459268.$$

E tra questi stessi numeri, che riescono assai prossimi fra loro, giace, come l'integrale, il risultato [14] della nostra integrazione. È questo il controllo a cui avevo alluso, col quale possiamo dire altresì d'aver *dimostrato matematicamente* che l'errore che si commette dando all'integrale [13] il valore [14] è in valore assoluto minore della differenza fra i numeri [17] e [18], e cioè minore di 0,0562 (1).

(1) Ma è facile anche dimostrare che il valore [14] è quello dell'integrale [13] con un errore minore di 0,0001. Posto invero

$$\log \sigma = a, \quad \log \rho \log c = b, \quad \log c = \gamma,$$

per la funzione y data dalla [12] si trova:

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} \frac{d^4 y}{d x^4} &= (b c^t)^4 + 2(2a + 3\gamma)(b c^t)^3 + (6a^2 + 12a\gamma + 7\gamma^2)(b c^t)^2 + \\ &+ (4a^3 + 6a^2\gamma + 4a\gamma^2 + \gamma^3)(b c^t) + a^4, \end{aligned}$$

* * *

E permettetemi di finire con una riflessione che vorrei partecipare agli studenti del secondo anno d'ingegneria che fossero per avventura qui presenti. Siamo al quattro giugno! Si è già iniziato per voi il penoso lavoro di preparazione agli esami di calcolo. Dovreste anche impadronirvi dei metodi elementari di integrazione indefinita, e ciò non si consegue se non facendo esercizi a più non posso.

— Ma a che servono gli integrali indefiniti?

— A calcolare quelli definiti.

— Ma il calcolo numerico di questi non si ottiene, con tutta l'approssimazione che si desidera, per esempio, col metodo esposto dianzi?

— Ciò è effettivamente.

— E allora perchè tanta insistenza sui metodi d'integrazione indefinita?

Ebbene, io voglio coraggiosamente confessarvi che la mia opinione è che è male insistere esageratamente su quei metodi. Con ciò non si fa che perpetuare il periodo eroico, così lento a morire, culminato con LEGENDRE, della scoperta a tutti i costi della funzione primitiva di una data funzione, espressa, quella come questa, algebricamente mediante funzioni elementari.

Avete da calcolare l'integrale definito di una frazione razionale? Passando attraverso l'integrale indefinito dovreste cominciare dallo scomporre in fattori il denominatore della frazione. Ma le radici del denominatore, necessarie per tale bisogna, chi ve le dà? Quel denominatore non si compiacerà certo, nelle appli-

donde facilmente si deduce che nell'intervallo (0,72) riesce

$$\left| \frac{d^4 y}{dx^4} \right| < 0,00001 .$$

Si ha quindi

$$\left| \rho_n \right| \cong \frac{L(b-a)^5}{n^4} = \frac{L \cdot 75^5}{n^4} < \frac{0,00001 \times 72^5}{n^4 \times 2880} < \frac{7}{n^4} .$$

cazioni che potrete trovare in pratica, di avere sempre le comode radici ($\frac{1}{2}$, 1, — 1, 2 o 3, ...) che trovate negli esempi del libro degli esercizi di calcolo e avrete dunque, *nella migliore delle ipotesi*, soltanto valori approssimati delle radici, e su questi valori approssimati dovreste poi calcolare le complicatissime espressioni, con logaritmi e architangenti, alle quali porta l'integrazione indefinita. Si domanda: a calcoli compiuti qual'è l'ordine dell'approssimazione conseguita?

È difficile il dirlo. Laddove il metodo numerico che vi ho descritto può darvi sempre — ripeto — il calcolo di ogni integrale definito con un qualsiasi prestabilito numero di cifre esatte, e ciò anche quando, come avviene per la funzione [12], l'integrale indefinito non sia algebricamente esprimibile mediante funzioni elementari o mediante funzioni già provviste di tavole.

Non dedicate dunque molto tempo a esercitarvi nell'integrazione indefinita e piuttosto meditate a lungo sui concetti e sui teoremi fondamentali del calcolo, non esclusi il concetto di limite e il teorema di WEIERSTRASS che sono i cardini del metodo infinitesimale.



Corporate Heritage
& Historical Archive