

Roma, addì 15 Luglio 1911



Onorevole Senatore,

Mi affretto a darle notizia di un grave errore rilevato nei confronti dei coefficienti di probabilità di morte pubblicati dal Dott. Sestilli.

*Sestilli*  
Il Sestilli, come Ella sa, fa questo ragionamento: Le tavole di mortalità del Farr e quella italiana sono fondate sullo stesso coefficiente complessivo di mortalità (22,4 o/oo); e poichè nelle tavole del Farr i coefficienti di probabilità di morte sono tutti più elevati fino al 75<sup>mo</sup> anni di età di quelli della tavola italiana, segue che la tavola italiana deve essere errata.

Affinchè il ragionamento del Sestilli potesse essere corretto i confronti dei coefficienti di probabilità di morte avrebbero dovuto essere istituiti sulla popolazione complessiva (ambo i sessi); invece il Sestilli fa il con-

Onorevole  
Ignor. Prof. Comm. Luigi Bodio  
Senatore del Regno



Corporate Heritage  
& Historical Archive

fronto dei soli maschi, mentre è ben noto che la mortalità delle femmine <sup>anni</sup> nei primi anni di età è molto minore della mortalità maschile.

Istituendo correttamente i confronti le tavole da confrontare sono le seguenti: A) tavola del Farr, ambo i sessi B) tavola italiana, ambo i sessi. (allegato).

Come ~~ella~~ <sup>si</sup> vede ~~la mortalità~~ in Inghilterra (1838=54) nel primo e <sup>nel</sup> secondo anno di età (i quali pesano <sup>notevolmente</sup> moltissimo sulla mortalità complessiva) <sup>la mortalità</sup> è ~~molto minore~~ <sup>molto maggiore</sup> che in Italia; ed è poi anche <sup>maggiore</sup> a partire dal 70<sup>mo</sup> <sup>anno</sup> di età, e per tutte le età successive. Fatto <sup>questo</sup> molto importante <sup>anche</sup> per la mortalità complessiva perchè ~~ella sa che il Lexis ha dimostrato che~~ <sup>compone il periodo nel quale si ha</sup> il massimo numero ~~dei~~ morti nelle età adulte ~~si ha fra i~~ 72 e i 73 anni. Cade qui completamente il ragionamento del Sestilli.

~~Sulle indicazioni del Sestilli furono tratti in inganno l'Einaudi, il quale scrisse all'uopo un articolo nel Corriere della Sera, ed il Ferraris che <sup>prese</sup> per base delle <sup>fu</sup> critiche alla tavola di mortalità italiana le affermazioni, destituite di fondamento, del Sestilli.~~

Ho voluto scriverle subito per provarle ancora, qu  
pesino sull'animo mio i suoi giudizi e come in questa  
discussione, turbata da interessi, io abbia procurato e  
curi di portare soltanto il risultato della ricerca spa  
nata ed obiettiva

Con massima devozione

mi abbia

*Suo*

*Alberto Beneduce*

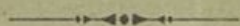
*la newlogia del compromesso Com. Rapisarda' nel numero di Agosto.*

INDAGINE STATISTICA

B

SULLA

MORTALITÀ FRA ASSICURATI ITALIANI



DELIBERATA

DALL'ASSOCIAZIONE ITALIANA DEGLI ATTUARI

E DA

COMPAGNIE OPERANTI IN ITALIA



FIRENZE

STABILIMENTO PELLAS

LUIGI CHITI Successore

1909.



Corporate Heritage  
& Historical Archive

## PREFAZIONE

---

Fino dal 1886 sorse in Italia il proposito di investigazioni sulla mortalità degli assicurati italiani. Prese allora l'iniziativa della compilazione di una tavola di mortalità il Comm. Bodio, che dirigeva in quel tempo l'ufficio della Statistica del Regno d'Italia, ed ebbe consenzienti i Direttori delle principali Compagnie operanti nel Regno. La Direzione Generale della Statistica del Regno d'Italia cominciò a raccogliere gli elementi, ma poi s'accorse che, o per erronea interpretazione delle istruzioni impartite per la compilazione delle schede, o per mancanza di accuratezza nella compilazione stessa, il materiale statistico accentrato non dava sufficiente affidamento di attendibilità.

Perciò le cose furono lasciate a mezzo.

Sorta l'« Associazione Attuari », questa vagheggiò subito l'idea di promuovere la formazione di una tavola di mortalità di assicurati italiani, ma per varie ragioni la concretò solo nel 1905 con una circolare alle Compagnie operanti in Italia, nella quale si domandava il concorso di materiale e di denaro.

Le Compagnie ritennero opportuno di dare risposta collegiale e si riunirono, per discutere l'iniziativa dell'« Associazione Attuari », a Milano nell'aprile del 1905. Parve allora a qualche Compagnia che la proposta indagine statistica fosse prematura, dato il ritardo, in confronto ad altre nazioni, dello sviluppo delle

assicurazioni Vita in Italia, e fu risposto all' « Associazione » plaudendo all'iniziativa e promettendo, ma per epoca un po' più lontana, ogni appoggio.

L' « Associazione » si acquetò per qualche anno, ma al principio del 1908 ritenne giunto il momento di far risorgere l'iniziativa.

All'uopo si assicurò dapprima l'adesione di un gruppo di Compagnie e poi, forte di essa, diramò una circolare a tutte le Compagnie operanti nel Regno sollecitandone la partecipazione al lavoro d'indagine statistica.

Risposero favorevolmente le seguenti 13 Compagnie :

Alleanza di Genova  
Assicurazioni Generali di Trieste  
Cattolica di Verona  
Compagnia di assicurazione di Milano  
Cooperativa-Vita di Milano  
Fenice di Vienna  
Fondiararia di Firenze  
Gresham di Londra  
Phénix di Parigi  
Popolare di Milano  
Prussiana di Berlino  
Reale di Milano  
Riunione Adriatica di Sicurtà di Trieste

le quali, adunatesi insieme al Consiglio dell' « Associazione Attuari » il giorno 18 dicembre 1908, stabilirono di costituirsi in gruppo per la formazione di tavole di mortalità di assicurati e vitalizzati italiani, se ne addossarono l'onere finanziario, procedettero alla nomina di un Comitato Esecutivo ed approvarono un tipo di scheda il quale permettesse le più ampie indagini,

pur riservandosi l'approvazione singola delle varie indagini che sarebbero state proposte dal Comitato Esecutivo.

Al presente le Compagnie stanno occupandosi della compilazione delle schede, le quali dovranno essere pronte ed inviate all'Ufficio centrale prima della fine del 1909.

Al Comitato Esecutivo sono state dalle Compagnie richieste schede in numero di 350,000, ma si ha ragione di credere che le schede saranno riconsegnate in numero non maggiore di 300,000. — Esse riguarderanno nella grandissima maggioranza assicurati; quelle di vitaliziati non raggiungeranno forse il numero di 20,000.

# CRITERI GENERALI

PER LA

FORMAZIONE DELLA TAVOLA DI MORTALITÀ

FRA ASSICURATI ITALIANI

---

*Deliberata dall'Associazione Italiana degli Attuari  
e da Compagnie operanti in Italia.*

---



Corporate Heritage  
& Historical Archive

---

## Unità Statistica.

La prima quistione che si tratta di risolvere volendo iniziare un lavoro di indagine statistica sulla mortalità, è di stabilire l'unità statistica da adottare.

Tale quistione ha un grande valore teorico perché è collegata coi principî fondamentali del calcolo delle probabilità, e ne ha eziandio uno pratico per l'influenza che essa esercita sul valore definitivo delle probabilità elementari.

I sistemi seguiti fin qui nelle statistiche di mortalità fra assicurati di Compagnie, sono quattro:

- a) Unità statistica — La persona assicurata.
- b) » — Il Contratto di assicurazione.
- c) » — La visita medica.
- d) » — L'unità di capitale assicurato.

Diremo rispettivamente i quattro metodi indicati, metodo o statistica per *persona*, per *polizza*, per *selezione*, e per *capitale*.

L'opportunità dell'uno o dell'altro sistema fu oggetto di larghe discussioni ogni volta che si dovette effettuare una indagine statistica, e provocò anche studi di confronto fra i risultati ai quali si giungeva con ciascuno di essi; tuttavia riteniamo che il problema, nonostante i varî e pregevoli lavori in proposito, debba ancora essere studiato con molta cura e determinare ulteriori ricerche.

Abbiamo perciò ritenuto opportuno di fare qualche considerazione, anche nel nostro caso, su tale argomento.

Anzitutto occorre osservare che è necessario distinguere nettamente due ordini di considerazioni « *teoriche e pratiche* » e porre il problema sotto forma di enunciato ben determinato, altrimenti si correrebbe il rischio, (e alcune classiche discussioni scientifiche, sui concetti della meccanica ad es., possono informarci), di non giungere a nulla di concreto perché il problema non fu posto in termini precisi. Conviene dunque intenderci sul significato che in questo caso dobbiamo dare alla parola *opportunità*.

Ci siamo domandati: quale dei metodi indicati è più opportuno? Scindiamo allora la domanda in altre due:

a) Quale è il più rigoroso?

b) Quale è preferibile dal punto di vista delle applicazioni?

Nel rispondere alla prima domanda non si può esitare affermando che tutti sono teoricamente rigorosi, ma che sono diretti alla soluzione di quattro quistioni *diverse*.

La statistica per persona condurrà infatti alla determinazione del numero di decessi fra  $I_x$  persone assicurate di età  $x$  prima che sia trascorsa una ulteriore unità di tempo, quelle per polizza, selezione e capitali condurranno invece alla determinazione rispettiva del numero di eliminazioni per morte fra  $I_x$  polizze, selezioni o unità di capitale assicurato, riposanti su persone di età  $x$  e durante la stessa unità di tempo. Ciascun sistema è dunque rigoroso in relazione al significato dei singoli risultati che si ottengono, e questi possono bensì servire di base a future previsioni se si suppongono soddisfatte, specialmente pei metodi *b*, *c* e *d*, alcune condizioni alle quali accenniamo più avanti.

Conviene però porre subito in rilievo un carattere particolare di cui gode il metodo per persona di fronte agli altri tre.

È noto che per ritenere legittima l'applicazione dei principi delle probabilità, che intervengono anche nella pratica assicurativa, è necessario supporre che sieno soddisfatte due condizioni essenziali, e, cioè, secondo la ordinaria terminologia del calcolo delle probabilità, la indipendenza dei casi elementari, e la loro omogeneità.

Vediamo se ed in quanto queste condizioni sono soddisfatte nei quattro metodi considerati.

Nel sistema per persona i casi elementari esposti al rischio sono rappresentati dalle singole persone assicurate, i casi favorevoli al fenomeno in istudio (mortalità) sono rappresentati dai singoli decessi, e quindi i casi elementari sono fra loro del tutto indipendenti, e ciascun decesso influisce sulla probabilità grezza di morte nella stessa misura.

Se consideriamo invece uno degli altri sistemi, per es. quello per selezione, gli esposti al rischio sono le singole selezioni, e i casi favorevoli al fenomeno della eliminazione di selezioni per morte, sono rappresentati da tutte le selezioni riposanti sulle teste che vengono a morire.

Si ha allora che i casi elementari non sono fra loro indipendenti perchè eliminandosi per morte una selezione si eliminano tutte quelle che riposano sulla stessa testa.

Riguardo poi alla condizione di omogeneità dei casi elementari, è manifesto che nel metodo per selezione non può supporre soddisfatta, perchè è presumibile che un individuo che ha subito più di una selezione, sia in condizioni di resistenza alla vita migliori di uno che ne ha subita una sola.

Si potrà osservare che, in sostanza, quando si considera una massa di individui esposti al rischio di morte, anche se essi furono raggruppati in base a vari ed influenti caratteri comuni, la condizione della omogeneità dei casi elementari non è mai soddisfatta, ma altro è prescindere da ineguaglianze distribuite nella massa secondo una legge sconosciuta ma presumibilmente uniforme e che influiscono sui risultati in vario senso, e altro è introdurre un coefficiente di ineguaglianza che agisce costantemente nello stesso senso, e che è distribuito secondo una legge, che nulla fa supporre costante. D'altra parte, si dirà, anche facendo la statistica per persona e usufruendo del completo materiale di osservazione, non si vengono ad eliminare quelli fra gli individui osservati, che avendo subito più di una selezione si trovano in condizioni singolari di resistenza alla vita di fronte alla massa di tutti i rimanenti.

Sotto questo punto di vista, per meglio soddisfare alla condizione dell'omogeneità, occorrerebbe dunque nella statistica per persona eliminare questi individui più volte selezionati; ma siccome ciò costringerebbe alla rinuncia di una parte assai abbondante del materiale, si può ancora usufruire di tutto il materiale stesso, osservando peraltro che ciascuno di questi casi singolari influisce per un solo elemento, mentre nella statistica per selezione influisce per tanti elementi quante sono le selezioni riposanti sulla stessa testa.

A questo proposito si potrebbe allora osservare che questo maggior peso che viene dato alle persone che hanno subito più selezioni è conforme al modo di operare delle Compagnie di assicurazione e che esso è quindi una caratteristica favorevole al sistema, ma questa è una considerazione piuttosto vaga, appartenente a quella categoria di considerazioni di cui nel calcolo delle probabilità e sue applicazioni bisogna diffidare ed, in ogni modo, essendo di natura pratica, preferiamo di discuterla dopo, trattando della questione *b)* postaci da principio.

Frattanto analizziamo meglio il carattere preso in esame, e trattiamo la cosa in generale.

Si voglia determinare la probabilità di un fenomeno in cui i casi elementari non sieno indipendenti né ugualmente possibili, e precisamente sieno in numero di  $n = a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 + \dots + a_r \alpha_r$  dei quali i primi  $a_1 \alpha_1$  sieno distribuiti in  $a_1$  gruppi di  $\alpha_1$  ciascuno, tali che verificandosene uno si verificano anche gli altri  $\alpha_1 - 1$ , i successivi  $a_2 \alpha_2$  sieno distribuiti in  $a_2$  gruppi di  $\alpha_2$  ciascuno, tali che verificandosene uno si verificano anche gli altri  $\alpha_2 - 1$ , e così via.

Supponiamo inoltre, che i primi  $a_1 \alpha_1$  casi sieno ugualmente possibili, gli  $a_2 \alpha_2$  successivi pure ugualmente possibili e così via.

Si valutino allora le due probabilità  $p$  e  $p'$  corrispondenti ad  $a_1 + a_2 + \dots + a_r$  casi elementari, e ad  $n = a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 + \dots + a_r \alpha_r$  casi elementari cioè:

$$p = \frac{s}{a_1 + a_2 + \dots + a_r} \quad \text{e} \quad p' = \frac{t}{a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 + \dots + a_r \alpha_r}$$

dove  $s$  e  $t$  sono i rispettivi casi favorevoli.

Se diciamo inoltre  $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_r$  le rispettive probabilità di uno dei casi  $\alpha_1$ , di uno dei casi  $\alpha_2, \dots$  etc. sarà:

$$s = \pi_1 a_1 + \pi_2 a_2 + \dots + \pi_r a_r \text{ e}$$

$$t = \pi_1 a_1 \alpha_1 + \pi_2 a_2 \alpha_2 + \dots + \pi_r a_r \alpha_r \text{ e quindi:}$$

$$p = \frac{\pi_1 a_1 + \pi_2 a_2 + \dots + \pi_r a_r}{a_1 + a_2 + \dots + a_r}$$

$$p' = \frac{\pi_1 a_1 \alpha_1 + \pi_2 a_2 \alpha_2 + \dots + \pi_r a_r \alpha_r}{a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 + \dots + a_r \alpha_r}$$

Se  $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \dots = \pi_r$ , è  $p = p' = \pi$ , cioè se i casi elementari sono tutti ugualmente possibili, le due probabilità  $p$  e  $p'$  si identificano.

Se però, ciò non è,  $p$  e  $p'$  differiscono in generale fra loro, in un senso o in un altro, a seconda della distribuzione e composizione dei singoli gruppi.

Venendo ora al caso particolare da noi considerato, abbiamo che dovendosi presumibilmente considerare gli individui che hanno subito più selezioni, in condizioni di maggiore resistenza alla vita, saranno le  $\pi$  diverse fra loro e quindi  $p \neq p'$ .

Che i risultati dovessero essere differenti era prevedibile indipendentemente da ogni calcolo, perchè  $p$  e  $p'$  esprimono due elementi di significato differente, ma circa al valore di  $p'$ , in relazione all'uso che ne dovrà esser fatto per le future previsioni, occorre osservare che tale uso dovrà ritenersi legittimo, soltanto, se si suppone che la stessa legge di frequenza regoli anche per l'avvenire la distribuzione dei varî gruppi  $\alpha$ .

Questa ultima circostanza è certo praticamente discutibile.

Ad ogni modo, salvo l'ipotesi della verifica di tale circostanza, le suddette valutazioni di  $p$  e  $p'$  possono teoricamente ritenersi giuste in relazione allo scopo rispettivo e distinto della ricerca nei due casi.

Passiamo ora al secondo lato della questione.

Quale dei varî metodi è da preferirsi in vista delle pratiche applicazioni?

Lo scopo pratico, è, come sappiamo, quello di valutare speranze matematiche corrispondenti ai varî impegni che intervengono nella pratica assicurativa.

Una prima osservazione che può farsi è allora la seguente:

Determinata la probabilità  $p$  di morte di un individuo e valutata la speranza matematica relativa ad un certo contratto, se la statistica fu fatta per persona, (salvo le consuete norme della teoria del rischio), non vi ha nessuna ragione per non ammettere che la speranza matematica relativa ad una serie di contratti, per esempio uguali e stipulati nello stesso istante dalla stessa persona, sia esattamente un multiplo della speranza matematica relativa ad un solo contratto: mentre, se la statistica e la corrispondente probabilità furono valutate per selezione, possiamo affermare che la speranza matematica relativa non varia in ragione aritmetica del numero dei contratti, appunto per la colleganza delle eliminazioni dei contratti stessi.

Già abbiamo sopra accennato che i valori  $p'$  ricavati da una statistica per selezione sono attendibili soltanto se si può supporre pel futuro una distribuzione di selezioni multiple simile a quella constatata nel materiale osservato; ora possiamo aggiungere che quando una Compagnia usa le  $p'$  per la valutazione delle speranze matematiche relative ai contratti dei suoi assicurati commette certo un errore *sistematico* perchè essa suppone che nel suo stock futuro di assicurazioni si presenterà una distribuzione di selezioni multiple simile a quella constatata nel complesso dei materiali raccolti dalle varie Compagnie, mentre assai spesso accade che una persona più volte assicurata, ha stipulato i suoi contratti, non presso una Compagnia sola, ma presso varie Compagnie.

Sotto questo punto di vista il maggior peso che si vorrebbe dare nella statistica per selezione ai decessi di assicurati che hanno subito più selezioni, mentre apparisce *intuitivamente* giusto, introduce nella pratica un errore sistematico non indifferente, e d'altra parte occorre riflettere che la bontà di un lavoro statistico, secondo i principî fondamentali della teoria delle osservazioni, consiste appunto nell'evitare gli errori sistematici, e nell'attenuare convenientemente, con opportuni procedimenti di perequazione, l'influenza degli errori accidentali.

D'altronde il maggior peso che si deve dare ad assicurazioni

multiple, se la statistica fu fatta per persona può essere preso in considerazione con la ordinaria teoria del rischio.

In favore della statistica per selezione, si possono però addurre altri argomenti. Si può dire che le Compagnie, in realtà, accettano i rischi in base alla selezione medica, e che lo studio della eliminazione di tali rischi risponde quindi meglio dello studio di eliminazione di persone al modo di funzionare delle Compagnie; è questo, senza dubbio, un valido argomento, in favore di questa unità statistica.

Questo carattere è posseduto, forse in grado anche maggiore dalla statistica per capitali, ma quest'ultima e quella per polizze, come fu altra volta osservato, hanno, di fronte alle altre, il grande difetto di dipendere da elementi commerciali che non hanno alcun carattere biologico, pur comprendendo alcuni errori della stessa natura di quelli sopra esaminati.

È noto che la statistica per persona fra assicurati offre, appunto nei casi di assicurazioni multiple, per la costruzione di alcuni tipi di tavole, qualche difficoltà, ma da difficoltà di natura simile non sono neppure immuni gli altri sistemi, e se ne può, del resto, attenuare l'influenza con opportune convenzioni.

Infine, può affermarsi, che la statistica per persona risponde pienamente allo scopo dello *studio obbieltivo* del fenomeno della mortalità, scopo che nonostante la finalità industriale delle Compagnie di assicurazione che si riuniscono per effettuare un lavoro di tanta importanza, non può essere, da esse, dimenticato.

È stato anche osservato il risparmio di lavoro del sistema per selezione, e la grande vicinanza dei valori definitivi delle probabilità, e più specialmente dei valori che figurano nelle tavole monetarie da adottare nella pratica, ottenuti coi vari metodi, e questa è certo un'altra validissima ragione pratica in favore di quel metodo.

Concretando, il sistema che sembra meglio rispondere alle varie esigenze di un buon lavoro statistico è quello per persona, pur potendosi addurre anche in favore di quello per selezione vari argomenti.

Il Comitato Tecnico, dopo avere ampiamente discusse le ra-

gioni in pro e contro i varî metodi venne nella determinazione di seguire nella presente statistica il metodo per persona, ma di procedere anche all'ordinamento per selezione, per avere così agio di discutere in base ai risultati l'interessante quistione del confronto fra questi due sistemi.

### Tavole da costruire.

Stabilita l'unità statistica da adottare, il Comitato tecnico discusse i varî tipi di tavole da costruire.

a) **Parametri delle tavole.** — Com'è noto le prime indagini statistiche sulla mortalità furono fatte considerando la probabilità elementare di morte come funzione di una sola variabile, e cioè *l'età*, sistema opportuno per compiere delle ricerche che dovevano condurre alla determinazione della legge studiata soltanto in un primo grado di approssimazione.

Ogni fenomeno della natura è concepito come il risultato di un grande numero di cause e, se fra queste alcune appariscono notevolmente preponderanti, in guisa da esercitare da sole la influenza massima sul fenomeno considerato, possono essere assunte in qualità di *variabili indipendenti* o come suol dirsi di *parametri essenziali*. Le cause minori che, almeno nel loro complesso, esercitano pure una influenza sensibile, vengono considerate come degli agenti svariatiissimi, individualmente poco influenti, che si compongono in vario modo, ora in un senso, ora in un altro, e seguendo delle norme che possono essere valutate in base all'esperienza, ma soltanto nel loro insieme. Quando la legge del fenomeno risulta dall'osservazione, secondo il criterio ora accennato, in realtà, le cause vengono tutte prese in considerazione, perchè sui valori sperimentali avranno tutte influito, ma mentre le maggiori fungeranno da *indici ordinatori* (*parametri*), le altre, nell'ipotesi di una funzione analitica adot-

tata per rappresentare la legge, influiranno sui coefficienti. In altri termini, detto  $y$  l'elemento di cui si vuole conoscere la legge di variazione e  $u_1, u_2, u_3, \dots u_n$ , gli elementi di cui esso è funzione, sarà  $y = f(u_1, u_2, u_3, \dots u_n)$  e se ad es.,  $u_1, u_2$ , sono considerate come variabili indipendenti sarà  $y = \phi(u_1, u_2)$  e  $u_3, u_4, \dots u_n$  influiranno sui valori dei coefficienti della  $\phi$ .

Ciò posto, la condizione essenziale perchè l'espressione che si ottiene per la  $\phi$  sia soddisfacente, specialmente dal punto di vista delle applicazioni, e nel caso particolare delle funzioni demografiche, per l'uso che se ne vuol fare nelle future previsioni, è che le cause minori  $u_3, u_4, \dots u_n$ , influiscano in tal modo da ritenere veramente costanti i valori che resulleranno pei coefficienti della  $\phi$ . Ne segue che la determinazione della legge in istudio deve ritenersi rigorosa soltanto se furono introdotte come variabili indipendenti almeno quelle che appaiono maggiormente collegate con la variabilità della funzione, e se le altre influiranno sul fenomeno studiato secondo leggi di frequenza presumibilmente costanti. Quando la funzione determinata deve servire per previsioni future, queste condizioni sono del tutto indispensabili perchè se fosse stata tralasciata qualcuna delle variabili essenziali, una piccola variazione nella relativa legge di frequenza altererebbe notevolmente i valori dei coefficienti, mentre variazioni sensibili nei coefficienti stessi non potranno avvenire per effetti delle cause minori altro che quando le relative leggi di frequenza subiscano dei notevoli spostamenti.

Passando ora al caso che particolarmente ci interessa, ricorderemo che quando il fenomeno della mortalità è studiato in una classe d'individui che entrano a farne parte subendo l'effetto di una qualsiasi selezione, un elemento che ha grande influenza sulla probabilità di morte è la *durata*, cioè l'intervallo di tempo decorso fra l'ammissione e l'istante considerato. Alla parola selezione dobbiamo dare in questo caso un significato molto generale: essa infatti indicherà una qualunque circostanza o complesso di circostanze che pongono l'individuo in particolare condizione di fronte alla massa, circostanze di cui la influenza

sul fenomeno della mortalità varia appunto col variare del tempo che intercede fra l'istante considerato e l'epoca di ammissione. Per questa ragione, e per tutto quanto abbiamo precedentemente osservato in generale, si ritiene ormai necessario considerare la legge di sopravvivenza o la probabilità elementare di morte come funzione di due variabili indipendenti  $x$  (età) e  $t$  (durata). Dal punto di vista geometrico le funzioni connesse col fenomeno della mortalità vengono in questo modo rappresentate da superficie di cui le linee  $x = \text{cost.}$   $t = \text{cost.}$  mostreranno l'andamento della legge quando uno dei due elementi varia e l'altro conserva inalterato il suo valore.

Poichè in Italia lo sviluppo della industria assicurativa è recente, fu opportunamente osservato che il materiale statistico avrebbe contenuto in prevalenza assicurazioni di breve durata: di qui, secondo le precedenti considerazioni, la necessità di introdurre la durata come variabile indipendente appunto perchè è supponibile un notevole spostamento negli anni futuri sulla legge di frequenza relativa a questi elementi. Il Comitato stabilì dunque di costruire Tavole a *due indici* (Select-Tables), non senza però escludere la costruzione di Tavole ad un solo indice, secondo le *età raggiunte* (aggregate-Tables) e Tavole *troncate*, con l'esclusione cioè dei primi anni di assicurazione. Restava pertanto il dubbio, che fu sollevato da diversi componenti il Comitato, dell'attendibilità di alcune di queste Tavole, dato il materiale non eccessivamente abbondante; ma fu stabilito di compiere la ricerca in tutta la estensione, riserbandosi di meglio giudicare sull'attendibilità delle varie tavole, dai risultati che saranno ottenuti.

*b) Suddivisione del materiale statistico.* — Stabiliti in questo modo gli elementi che dovevano essere considerati come variabili indipendenti restava da prenderne in considerazione altri che nelle precedenti statistiche si mostrarono essenzialmente influenti sui valori delle funzioni demografiche. Fra i principali occorre subito ricordare il *sexso* e la *categoria di assicurazione*. Riguardo al sesso, essendo ormai assodata la diversità fra le curve di sopravvivenza degli uomini e delle donne,

fu deciso di distinguere nettamente i due materiali, nell'intendimento di costruite tavole separate.

Riguardo alla Categoria di assicurazione fu convenuto di suddividere il materiale in quattro gruppi per costruire le Tavole corrispondenti riserbandosi per altro di addivenire eventualmente a opportune riunioni di alcuni dei gruppi stessi.

I gruppi sono i seguenti:

1.º *Assicurazioni in Caso di morte a lunga scadenza* (Vita Intera, — anche se pattuito il pagamento del Capitale a 75 anni od oltre — assicurazioni di Capitali o di Rendite di Sopravvivenza).

2.º *Assicurazioni miste*, cioè tutti i Contratti a termine.

3.º *Assicurazioni Temporanee*, cioè assicurazioni in caso di morte a breve scadenza.

4.º *Rendite vitalizie immediate*, (stipulate mediante versamento di un capitale alla sottoscrizione della polizza, o derivanti da altri contratti, quali Rendite Differite, assicurazioni di Capitali e Rendite, ecc., ma solo quando alla data di decorrenza della Rendita siavi stata opzione tra la Rendita ed un Capitale).

La suddivisione del materiale statistico così stabilita trova la sua corrispondenza nei tipi di scheda adottati descritti in appresso.

È noto che altri elementi influiscono sulla mortalità quali, ad esempio, la *somma assicurata*, i *gradi di salute all'epoca dell'ammissione*, ecc. ma il Comitato si è riserbato di discutere sull'opportunità di fare qualche studio in proposito, soltanto dopo avere ottenuto i primi risultati.

Concludiamo indicando le Tavole che sin d'ora il Comitato si propone di costruire:

1.º Uomini *Assicurazioni Vita Intera*.

2.º Uomini *Assicurazioni Miste*.

3.º Uomini *Assicurazioni Temporanee*.

4.º Donne *Assicurazioni Morte-Miste*.

5.º Uomini *Rendite Immediata*.

6.º Donne *Rendite Immediata*.

## Periodo statistico.

Il periodo statistico convenuto va dal 1° Gennaio 1878 al 31 Dicembre 1908. Precisamente saranno prese in osservazione tutte le polizze perfezionate emesse:

a) prima del 1° Gennaio 1878 ed ancora in vigore a tale data;

b) dal 1° Gennaio 1878 in poi e fino al 31 Dicembre 1907.

Per i vitaliziati il periodo statistico va dal 1° Gennaio 1858 al 31 Dicembre 1907. Saranno altresì annotate nelle schede tutte le eliminazioni avvenute nel 1908, eccetto i sinistri per causa del disastro di Reggio e Messina.

## Schede adottate.

La scheda che viene adottata è tale da permettere estese indagini ed in particolare quelle sopra indicate, giacchè il Comitato ha ritenuto opportuno di non vincolarsi troppo sin da principio con un tipo di scheda molto specifico.

Per le assicurazioni di uomini sono stati istituiti tre tipi di schede = *Verde* = contrassegnata colla lettera **V** per le assicurazioni in caso di morte a lunga scadenza, = *Bianca* = contrassegnata colla lettera **M** per le assicurazioni miste, e = *Rosa* = contrassegnata colla lettera **T** per le temporanee.

Una unica scheda è stata introdotta per le assicurazioni in caso di morte e miste su teste di donna = *Violetta* = contrassegnata con la lettera **d**.

Per le rendite vitalizie su testa di uomo è stata istituita una scheda *azzurra*, col contrassegno **R u**, e per quelle su testa di donna una scheda *gialla*, col contrassegno **R d**.

I primi quattro tipi di schede (assicurati) conterranno i seguenti elementi che dovranno essere forniti dalle singole Compagnie, e cioè:

Compagnia — Numero di polizza — Categoria — Somma assicurata — Cognome — Nome — Paternità — Professione —

Data di eliminazione, di entrata, e di nascita — Causa dell'eliminazione — Causa di morte — Osservazioni particolari — Soprappremio per risultanze del rapporto medico.

Altri due elementi verranno introdotti nella scheda dall'Ufficio centrale, e cioè durata del periodo di osservazione, ed età all'ammissione. Le date di eliminazione, di entrata e di nascita saranno espresse in anno, mese e giorno ma verranno poi convertite, dall'Ufficio centrale, sulla scheda stessa, in apposito spazio, in anno e frazione decimale, con opportune tabelle di facile costruzione.

Per semplice differenza potranno essere allora ottenute la *durata* e *l'età esatte*, espresse pure nel sistema decimale.

Le schede per le rendite (vitalizzati) conterranno i seguenti elementi che dovranno essere forniti dalle singole Compagnie, e cioè:

Compagnia — Numero di polizza — Rendita assicurata — Cognome — Nome — Paternità — Date di eliminazione, di entrata, e di nascita — Causa dell'eliminazione — Osservazioni particolari. — Anche per queste schede vale quanto è stato detto sulla *durata* e *l'età* all'ammissione, e sul modo di valutarle sulla scheda.

Tutto ciò naturalmente non vincola affatto il sistema che il Comitato intenderà adottare per la valutazione delle età e durate, nella redazione delle tavole riassuntive.

Riportiamo di seguito i sei tipi di scheda adottati.

	<b>V</b> <i>(Compagnia).</i>
N. di pol: .....	Cognome .....
Categoria .....	Nome .....
Somma assicurata .....	Paternità .....
Professione .....	
anno      m.      g.	
Data di eliminazione	Durata
» » entrata . . .	[ ..... ]
	Età
» » nascita . . .	[ ..... ]
Causa dell'eliminazione .....	
» della morte .....	
Osservazioni	
Soprapremio p. risultanze del rapp. med. ....	

	<b>M</b>	<i>(Compagnia).</i>
N. di pol. .... Cognome .....		
Categoria ..... Nome .....		
Somma assicurata ..... Paternità .....		
Professione .....		
	anno    m.    g.	
Data di eliminazione	.....	Durata
» » entrata . . .	.....	[ ..... ]
		Età
» » nascita . . .	.....	[ ..... ]
Causa dell'eliminazione .....		
» della morte .....		
Osservazioni		
Soprapremio p. risultanze del rapp. med. ....		

**T**

(Compagnia).

N. di pol. .... Cognome .....

Categoria ..... Nome .....

Somma assicurata ..... Paternità .....

Professione .....

	anno	m.	g.	
Data di eliminazione	.....	.....	.....	
» » entrata . . .	.....	.....	.....	Durata [ ..... ]
» » nascita . . .	.....	.....	.....	Età [ ..... ]

Causa dell'eliminazione .....

» della morte .....

Osservazioni

Soprapremio p. risultanze del rapp. med. ....



<b>d</b>		<i>(Compagnia).</i>	
		paterno	maritale
N. di pol. ....	Cognome .....		
Categoria .....	Nome .....		
Somma assicurata .....	Paternità .....		
Professione .....			
	anno	m.	g.
Data di eliminazione			
» » entrata . . .			
» » nascita . . .			
			Durata
			[ ..... ]
			Età
			[ ..... ]
Causa dell'eliminazione .....			
» della morte .....			
Osservazioni			
Soprapremio p. risultanze del rapp. med. ....			

**RU** (Compagnia).

N. di pol. .... Cognome .....

Rendita assicurata ..... Nome .....

Paternità .....

	anno	m.	g.		
Data di eliminazione	.....	.....	.....	.....	Durata
» » entrata . . .	.....	.....	.....	.....	[ ..... ]
» » nascita . . .	.....	.....	.....	.....	Età
					[ ..... ]

Causa dell'eliminazione .....

Osservazioni

**Rd** (Compagnia).

paterno

maritale

N. di pol. .... Cognome .....

Rendita assicurata ..... Nome .....

Paternità .....

	anno	m.	g.	
Data di eliminazione	.....	.....	.....	Durata
» » entrata . . .	.....	.....	.....	[ ..... ]
» » nascita . . .	.....	.....	.....	Età
				[ ..... ]

Causa dell'eliminazione .....

Osservazioni

## Istruzioni alle Compagnie per la compilazione delle schede.

Riassumiamo le principali istruzioni che sono state impartite alle Compagnie per la compilazione delle schede.

### a) Schede di assicurati.

*Data di entrata.* — È la data effettiva di emissione quando l'effetto è immediato o retroattivo, è invece la data di decorrenza del rischio quando l'effetto è differito.

*Polizze da considerare.* — Assicurazioni stipulate in Italia su teste residenti in Italia al momento della stipulazione, accettate in base a visita medica completa. — Escluse le riassicurazioni ricevute da altre Compagnie.

*Assicurazioni su più teste.* — Si compileranno tante schede quante le teste assicurate. — Per le assicurazioni di sopravvivenza, dotali, e rendite di educazione, la scheda va compilata solo per la testa assicurata che subì la visita medica.

*Trasformazioni di Polizze.* — Se la trasformazione avvenne in base a nuova visita medica, la polizza primitiva si estingue, e ne sorge una nuova registrata in scheda separata; in caso opposto si prolunga la durata della prima sino all'eliminazione della nuova.

*Somma assicurata.* — Si indicherà l'ammontare del capitale inizialmente assicurato. — Per capitali superiori alle L. 100,000 si scriverà solo 100,000. — Nel caso di rendite (rendite di sopravvivenza e rendite di educazione) si indicherà quale somma assicurata il decuplo della rendita.

*Cognome, nome e paternità.* — Si indicheranno le sole due prime lettere del cognome, il nome per intero, e il nome paterno pure per intero. Per le donne valgono norme speciali.

*Data di eliminazione.* — Nei casi di morte o di scadenza sarà indicata la data di decesso o di scadenza.

Nei casi di rescissione, è la data di cessazione del rischio per parte della Compagnia, nei casi di riscatto la data della quietanza di riscatto, nei casi di riscatto d'ufficio per mancato pagamento di interessi su prestiti gravanti una polizza, è la data di scadenza degli interessi rimasti insoluti.

Nei casi di riduzione di polizze a termine con emissione di polizza liberata, è la data di emissione della polizza liberata, ma se l'emissione è posteriore alla cessazione del rischio sulla vecchia polizza, sarà la data della cessazione del rischio stesso.

Nei casi di riduzione di una polizza non a termine, l'osservazione continua.

Nei casi di trasformazione in seguito a nuova visita medica la data di eliminazione sarà quella di emissione del nuovo contratto.

*Data di nascita.* — Quando esista il certificato di nascita, la data dovrà essere ricavata dal certificato stesso, altrimenti si userà quella indicata dall'assicurato.

*Causa dell'eliminazione.* — Sarà indicata una delle seguenti: morte, rescissione, riscatto, riscatto d'ufficio, riduzione, scadenza, trasformazione, rescissione involontaria (sopravvivenze, rendite di educazione, assicurazioni su più teste in relazione alle superstiti). Per le polizze in vigore al 31 dicembre 1908 si userà il contrassegno V.

*Cause della morte.* — Saranno classificate da un medico secondo raggruppamenti convenuti.

*Rimesse in vigore.* — Se una polizza è stata sospesa negli effetti per mancato pagamento del premio e successivamente rimessa in vigore, sarà considerata come rimasta in vigore ininterrottamente.

*Schede relative ad una stessa testa.* — Saranno raggruppate da ogni singola Compagnia con un anello di gomma.

Nel quadrato tracciato nell'angolo superiore sinistro della scheda devesi segnare l'età che ha servito alla Compagnia per l'applicazione della tariffa.

**b) Schede di vitaliziati.**

*Data di entrata.* — È la data effettiva di emissione quando l'effetto è immediato o retrattivo, è invece la data di decorrenza del rischio, quando l'effetto è differito. — Nel caso in cui essendo differito l'effetto, è convenuto che il capitale resta acquisito alla Compagnia se la morte del vitaliziato avviene nel periodo di differimento, la data di entrata è quella di emissione.

*Polizze da considerare.* — Rendite stipulate in Italia su teste residenti in Italia al momento della stipulazione. Escluse le riasicurazioni ricevute da altre Compagnie, e le collettive.

*Assicurazioni su più teste.* — Tante schede quante le teste assicurate.

*Rendita assicurata.* — Si indicherà l'ammontare della rendita inizialmente assicurata. — Per rendite superiori alle L. 10,000 si scriverà solo L. 10,000. Nel caso di aumenti successivi di rendite si faranno altrettante nuove schede.

*Cognome, Nome e Paternità.* — Come per le schede di assicurati.

*Data di eliminazione.* — Nei casi di morte la data del decesso, nei casi di riscatto, quella della relativa quietanza.

*Data di nascita.* — In base all'atto di nascita.

*Causa dell'eliminazione.* — Sarà indicato se per morte o riscatto. Per le polizze in vigore al 31 dicembre 1908 si userà il contrassegno V.

*Schede relative ad una stessa testa.* — Saranno raggruppate da ogni singola Compagnia con un anello di gomma.

Nel quadrato tracciato nell'angolo superiore sinistro della scheda devesi segnare l'età che ha servito alla Compagnia per l'applicazione della tariffa.

Tanto per le schede di assicurati, come per quelle di vitaliziati, vigono poi altre norme particolari di minore importanza, ma opportune per la redazione di un materiale omogeneo e rigoroso.

## Formazione delle tavole riassuntive. Esposti al rischio.

Raccolto il materiale statistico redatto dalle singole Compagnie in base alle precedenti istruzioni, l'Ufficio centrale dovrà procedere alla classificazione e tabulazione dei dati raccolti. I sistemi che possono essere seguiti nella manipolazione ed ordinamento tabulare dei dati sono vari, ma anzitutto occorre stabilire il metodo da adottare per la valutazione dell'età all'entrata e della durata da introdurre nelle tavole.

Corrispondentemente sorgono vari procedimenti per la valutazione del numero degli esposti al rischio, e dei corrispondenti casi di morte verificati.

Questa quistione deve essere ampiamente discussa dal Comitato Tecnico perchè dalla sua risoluzione dipenderà essenzialmente il sistema di lavoro da effettuarsi presso l'Ufficio centrale.

Frattanto, perchè al Comitato stesso venga facilitato il compito di prendere una decisione in proposito riteniamo opportuno di trattare la cosa nel modo più generale possibile, riproducendo il metodo e le formule relative determinate dal prof. Toja nel suo lavoro « Sull'ordinamento delle osservazioni demografiche », \* metodo che appunto pel suo massimo grado di generalità comprende tutti i sistemi seguiti fin qui nelle varie statistiche di mortalità effettuate.

Consideriamo una statistica limitata ad un determinato periodo (per esempio dal 31 dicembre di un anno al 31 dicembre di un altro anno), e supponiamo di far dipendere il fenomeno della mortalità da un solo parametro  $x$  (età). Dobbiamo prendere in esame:

Gli elementi esistenti al principio del periodo statistico.	= $\nu$
I nuovi ammessi durante il periodo stesso . . . . .	= $\lambda$
I morti durante il periodo statistico . . . . .	= $\delta$
Le eliminazioni per cause varie. . . . .	= $\omega$
Gli esistenti alla chiusura del periodo . . . . .	= $\varepsilon$

\* V. N. 18 del *Bollettino dell'Associazione Italiana degli Attuarii*.

L'unità di tempo può scegliersi in vario modo, e cioè si può adottare anni di *calendario*, di *vita*, di *polizza*. Indicheremo in generale con  $E_x$  gli esposti al rischio di morte all'età  $x$ . Non definiamo qui la funzione  $E_x$  giacchè con quel che segue intendiamo indicare dei procedimenti pratici, rigorosi soltanto in un certo grado di approssimazione, a ciascuno dei quali corrisponde un metodo per il calcolo di  $E_x$ . La  $E_x$ , in ognuno di quei metodi riesce appunto *definita* dalla sua espressione.

Se avessimo voluto eseguire un procedimento teoricamente più rigoroso avremmo dovuto definire prima la funzione  $E_x$  con tutto rigore per determinarne poi la espressione analitica corrispondente, ma poichè questo sistema ci avrebbe condotti a discussioni e risultati, del resto interessantissimi, sul modo più conveniente di introdurre la suddetta funzione, che avrebbero avuto poi nella valutazione delle probabilità di morte minor peso di altri elementi che intervengono inevitabilmente ad alterare i risultati stessi, abbiamo preferito, sulla esperienza delle precedenti statistiche, attenerci al metodo che segue.

Stabiliamo allora il seguente *principio generale*:

*Un individuo dell'età  $x$  rimasto in osservazione, durante il periodo considerato, per  $t$  unità di tempo, agli effetti della statistica, equivale a  $t$  individui ed età rispettive  $x, x+1, \dots, x+t-1$ , in osservazione per un unità di tempo.*

Ciò posto, se  $x$  è un'età espressa in numero intero, e  $0 \leq \theta < 1$ , sarà:

$$\begin{aligned} x+1 > x + \theta_x \geq x \\ x-1 < x - \theta_x \leq x \end{aligned}$$

Indichiamo con  $v_x$  il numero degli individui esistenti all'inizio del periodo statistico ad età comprese tra  $x$  e  $x+1$ , e precisamente all'età  $x + \theta_x$ , ( $\theta_x$  varierà da individuo ad individuo), con  $\epsilon_x$  il numero degli esistenti alla chiusura con età compresa tra  $x$  ed  $x+1$ , e precisamente all'età  $x + \theta_x$  (dove le  $\theta_x$  avranno ora valori differenti dai precedenti), con  $\lambda_x$  il numero degli ammessi durante il periodo all'età  $x + \theta_x$ , con  $\omega_x$  il numero degli eliminati all'età  $x + \theta_x$  per cause diverse, e finalmente con  $\delta_x$  i casi di morte verificati tra individui di età  $x + \theta_x$ .

Poichè nella statistica di mortalità i casi di morte si considerano come esposti al rischio di morte durante tutto l'anno in cui sono avvenuti, non dovremmo considerare nei casi di morte le frazioni  $\theta_x$ , tuttavia introduciamo le suddette frazioni anche in questo caso per dare maggiore omogeneità alle formule che siamo per dedurre.

I casi  $\nu_x, \lambda_x, \omega_x, \varepsilon_x$ , partecipano al rischio dell'età  $x$ , soltanto per una frazione di anno.

Se supponiamo per un momento:

$$\sum_{\lambda} \theta_x = 0, \quad \sum_{\nu} \theta_x = 0, \quad \sum_{\varepsilon} \theta_x = 0, \quad \sum_{\omega} \theta_x = 0,$$

avremo il seguente prospetto:

Età	Esistenti al principio	Nuovi ammessi	Eliminati	Esistenti alla chiusura	Morti
.....	.....	.....	.....	.....	.....
$x - 1$	$\nu_{x-1}$	$\lambda_{x-1}$	$\omega_{x-1}$	$\varepsilon_{x-1}$	$\delta_{x-1}$
$x$	$\nu_x$	$\lambda_x$	$\omega_x$	$\varepsilon_x$	$\delta_x$
$x + 1$	$\nu_{x+1}$	$\lambda_{x+1}$	$\omega_{x+1}$	$\varepsilon_{x+1}$	$\delta_{x+1}$
.....	.....	.....	.....	.....	.....

Porremo:

$$E_x = E_{x-1} + \lambda_x + \nu_x - \omega_x - \varepsilon_x - \delta_{x-1}$$

da cui si trae:

$$\begin{aligned} E_x &= \sum (\lambda_x + \nu_x - \omega_x - \varepsilon_x - \delta_{x-1}) \\ &= \sum (\lambda_x + \nu_x - \omega_x - \varepsilon_x - \delta_x) + \delta_x \end{aligned}$$

Se invece consideriamo le frazioni  $\theta_x$  di età precedentemente introdotte, per gli esposti al rischio, porremo:

$$\begin{aligned} E_x &= \sum (\lambda_x + \nu_x - \omega_x - \varepsilon_x - \delta_x) + \delta_x \\ &= \sum_{\lambda} \theta_x - \sum_{\nu} \theta_x + \sum_{\varepsilon} \theta_x + \sum_{\omega} \theta_x \end{aligned}$$

e posto:

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda} \theta_x + \sum_{\nu} \theta_x - \sum_{\varepsilon} \theta_x - \sum_{\omega} \theta_x - \sum_{\delta} \theta_x &= \Theta_x \\ \lambda_x + \nu_x - \omega_x - \varepsilon_x - \delta_x &= \Phi(x) \end{aligned}$$

$$\mathbf{E}_x = \Sigma \phi(x) - \Theta_x + \delta_x - \Sigma_{\delta} \theta_x$$

Se indichiamo con  $\bar{\mathbf{E}}$  gli esposti al rischio di *morte* e di *eliminazione*, porremo:

$$\bar{\mathbf{E}}_x = \Sigma \phi(x) - \Theta_x$$

da cui:

$$\bar{\mathbf{E}}_{x+1} = \bar{\mathbf{E}}_x + \phi(x+1) - \Delta \Theta_x$$

$\bar{\mathbf{E}}_x$  può dunque calcolarsi in due modi che Ackland chiamò *sommatorio* e *ricorrente*.

### Casi particolari.

1) Quando gli assicurati vengono osservati lungo i loro *anni di vita*, ed il periodo statistico è espresso da un numero intero di anni è manifestamente:

$$\Sigma_{\lambda} \theta_x = \Sigma_{\nu} \theta_x = \Sigma_{\varepsilon} \theta_x = 0$$

si ha allora:

$$\mathbf{E}_x = \Sigma \phi(x) + \Sigma_{\omega} \theta_x + \delta_x$$

$$\text{e: } \bar{\mathbf{E}}_x = \Sigma \phi(x) + \left[ \Sigma_{\omega} \theta_x + \Sigma_{\delta} \theta_x \right]$$

Come lo stesso ing. Toja osserva, questo sistema a preferenza della statistica per anni di polizza o di calendario risparmia molto lavoro, ed elimina gli errori dovuti alle frazioni  $\theta$  che qui non compariscono, ma provoca molti errori accidentali relativi alla eventuale inclusione delle eliminazioni avvenute nel primo e nell'ultimo anno del periodo statistico, prima e dopo l'anniversario di nascita, casi che debbono invece essere esclusi in questo sistema.

2) Se l'età vera di un individuo ad un certo istante è  $x'$ , ed  $|x|$  è il numero intero più vicino, sarà

$$x' = |x| \pm \theta \text{ con } \theta < \frac{1}{2}, \text{ (nearest age)}$$

Se  $x' = |x| + \theta$ , sarà  $|x| + 1$  l'età intera per eccesso,  $|x|$  per difetto.

Se  $x' = |x| - \theta$ , sarà  $|x|$  l'età intera per eccesso,  $|x| - 1$  per difetto.

Se per i casi  $\lambda, \nu, \varepsilon$  sostituiamo l'età  $|x|$  all'età vera, sarà:

$$\Sigma_{\nu} \theta = \Sigma_{\lambda} \theta = \Sigma_{\varepsilon} \theta = 0$$

$$e: \quad E_x = \Sigma \phi(x) + \Sigma_{\omega} \theta_x + \delta_x$$

$$E_x = \Sigma \phi(x) + \Sigma_{\omega} \theta_x + \Sigma_{\delta} \theta_x$$

dove per  $\omega$  e  $\delta$  le età sono valutate per difetto.

Se anche per  $\omega$  adottiamo l'età  $|x|$  sarà:

$$E_x = \Sigma \phi(x) + \delta_x$$

Considerando l'età  $|x|$  per i casi  $\lambda, \nu, \varepsilon$  e supponendo una uniforme distribuzione dei casi di eliminazione sarà

$$\Sigma_{\omega} \theta_x = \frac{\omega_x}{2}; \quad \Sigma_{\delta} \theta_x = \frac{\delta_x}{2}$$

e quindi:

$$E_x = \Sigma \phi(x) + \frac{\omega_x}{2} + \delta_x$$

$$\bar{E}_x = \Sigma \phi(x) + \frac{1}{2}(\omega_x + \delta_x)$$

### 3) *Uso delle età in eccesso.*

Osservando i casi  $\lambda, \nu, \varepsilon, \omega, \delta$  alle età in eccesso, e ponendo:

$$\lambda_x = \lambda'_{x-1}, \quad \varepsilon_x = \varepsilon'_{x-1}, \quad \dots \dots \dots$$

$$\phi'(x) = \lambda'_x + \nu'_x - \omega'_x - \varepsilon'_x - \delta'_x$$

$$\Theta'_x = \Sigma'_{\delta'} \theta_x + \Sigma'_{\nu'} \theta_x - \Sigma'_{\varepsilon'} \theta_x - \Sigma'_{\omega'} \theta_x - \Sigma'_{\delta'} \theta_x$$

sarà

$$E_x = \Sigma \phi'(x) + \Theta'_x + \Sigma'_{\delta'} \theta_x$$

### 4) *Tavole inglesi $H^M$ ed $H^F$ .*

Il periodo statistico si iniziò con l'inizio stesso delle operazioni di ogni Compagnia, si chiuse al 31 Dicembre 1863, le nascite furono supposte uniformemente distribuite e riportate al 31 Dicembre, le ammissioni al 30 Giugno. La durata fu valutata come differenza tra gli anni di calendario di eliminazione e di ammissione (durata media) similmente fu valutata l'età per gli esistenti alla chiusura.

Si ha allora:

$$\nu_x = \Sigma_{\nu} \theta_x = \nu'_x = \Sigma_{\nu'} \theta_x = 0$$

$$\Sigma'_{\lambda'} \theta_{x+1} = \frac{1}{2} \lambda_{x+1}, \quad \Sigma'_{\varepsilon'} \theta_{x+1} = 0,$$

$$\Sigma'_{\omega'} \theta_{x+1} = \frac{\omega'_{x+1}}{2}, \quad \Sigma'_{\delta'} \theta_{x+1} = 0,$$

e quindi:

$$E_x = \sum \phi'_x + \frac{1}{2} (\lambda'_{x+1} - \omega'_{x+1}) \quad (\text{Meikle})$$

$$E_x = E_{x-1} + \frac{1}{2} (\lambda'_x + \lambda'_{x+1}) - \frac{1}{2} (\omega'_x + \omega'_{x+1}) - (\varepsilon'_x + \delta'_x) \quad (\text{Gray})$$

5) *Metodo di G. F. Hardy e H. J. Rothery* (Sulla mortalità in India).

$$\nu = \sum \theta_x = 0$$

$\lambda_x$ ,  $x$  età media, differenza tra gli anni di calendario di ammissione e di nascita.

$\omega_x$ ,  $x$  età media, differenza tra gli anni di calendario di eliminazione e di nascita.

$\varepsilon_x$ ,  $x$  età più vicina alla data di chiusura.

$\delta_x$ ,  $x$  età in difetto ottenuta aggiungendo all'età all'ammissione come sopra ricavata, la durata intera in difetto.

Sarà:

$$\sum \theta = \sum \theta = \sum \theta = 0$$

$\lambda \quad \omega \quad \varepsilon$

e:

$$E_x = \sum (\lambda_x - \omega_x - \varepsilon_x - \delta_{x-1})$$

6) *Metodo di George King*. Periodo statistico limitato da un certo numero di anni di calendario.

$\lambda_x$  e  $\nu_x$  età  $|x|$  al 31 dicembre più vicino alla data di ammissione.

$\omega_x$  età  $|x|$  al 31 dicembre più vicina alla data di eliminazione.

$\varepsilon_x$  età  $|x|$  alla data di chiusura delle osservazioni.

$\delta_x$  età  $|x|$  al 31 dicembre precedente alla data della morte.

Avremo:

$$E_x = \sum (\lambda_x + \nu_x - \omega_x - \varepsilon_x - \delta_{x-1})$$

### 7) *Tavole inglesi O<sup>M</sup> ed O<sup>F</sup> 1863-1893.*

I contratti venivano seguiti in osservazione per anni di polizza, ogni contratto esistente all'inizio entrava in osservazione al suo anniversario di polizza del 1863, ogni nuovo ammesso entrava in osservazione alla data effettiva di ammissione, gli esistenti alla chiusura uscivano al loro anniversario di polizza

del 1893, la data all'ammissione veniva calcolata in base all'età  $|x|$  sopra definita, e per le morti ed eliminazioni la durata veniva valutata all'anniversario di polizza precedente alla data effettiva di morte o di eliminazione, salvo alcune convenzioni particolari per alcuni casi. Si ha allora, in questa ipotesi:

$$E_{xx} = \sum (\lambda_{xx} + \nu_{xx} - \omega_{xx} - \varepsilon_{xx} - \delta_{xx-1}).$$

**Esposti al rischio per le tavole a due indici.**

Le formule relative si deducono subito dalle precedenti, immaginando di classificare i casi osservati in tanti gruppi quante sono le età all'ammissione, trattando ogni gruppo a sè, e sostituendo nelle formule generali stabilite, la durata all'età.

Usando di note indicazioni, abbiamo:

$|x|$  = età all'ammissione:

Durata	Esistenti al principio	Nuovi ammessi	Eliminati	Esistenti alla fine	Morti
0	$\nu_{ x }$	$\lambda_{ x }$	$\omega_{ x }$	$\varepsilon_{ x }$	$\delta_{ x }$
.....	.....	.....	.....	.....	.....
$t-1$	$\nu_{ x +t-1}$	.....	$\omega_{ x +t-1}$	$\varepsilon_{ x +t-1}$	$\delta_{ x +t-1}$
$t$	$\nu_{ x +t}$	.....	$\omega_{ x +t}$	$\varepsilon_{ x +t}$	$\delta_{ x +t}$
$t+1$	$\nu_{ x +t+1}$	.....	$\omega_{ x +t+1}$	$\varepsilon_{ x +t+1}$	$\delta_{ x +t+1}$

Avremo:

$$E_{|x|+t} = \sum (\nu_{|x|+t} - \omega_{|x|+t} - \varepsilon_{|x|+t} - \delta_{|x|+t}) + \delta_{|x|+t} - \sum_{\nu} \theta_{|x|+t} + \sum_{\varepsilon} \theta_{|x|+t} + \sum_{\omega} \theta_{|x|+t}$$

Manifestamente  $\sum_{\lambda} \theta = \lambda_{|x|+t} = 0$

Posto:

$$\Phi_{|x|+t} = \nu_{|x|+t} - \omega_{|x|+t} - \varepsilon_{|x|+t} - \delta_{|x|+t}$$

$$\Theta_{|x|+t} = \sum_{\nu} \theta_{|x|+t} - \sum_{\varepsilon} \theta_{|x|+t} - \sum_{\omega} \theta_{|x|+t} - \sum_{\delta} \theta_{|x|+t}$$

sarà :

$$E_{|x|+t} = \lambda_{|x|} + \sum \phi_{|x|+t} - \Theta_{|x|+t} + \delta_{|x|+t} - \sum_{\delta} \theta_{|x|+t}$$

$$\bar{E}_{|x|+t} = \lambda_{|x|} + \sum \phi_{|x|+t} - \Theta_{|x|+t}$$

Se il periodo statistico viene seguito secondo anni di polizza

$$\sum_{\nu} \theta = \sum_{\varepsilon} \theta = 0$$

e così pure le formule si semplificano facendo particolari ipotesi sul calcolo delle durate, come sopra abbiamo mostrato per le statistiche fatte in base ad un solo indice.

Nelle prossime riunioni il Comitato dovrà iniziare la discussione sul metodo da seguire per la statistica italiana. Il metodo definitivo sarà probabilmente stabilito soltanto dopo alcuni studi da fare sul materiale che si sta raccogliendo.

*Milano, Maggio 1909.*

### Il Comitato Esecutivo

BESSO comm. MARCO,	<i>Presidente</i>
TOJA comm. prof. ing. GUIDO,	<i>Vice-Presidente</i>
GOBBI prof. ULISSE,	<i>Membro</i>
GRAF dott. JULIUS,	»
PEROZZO comm. ing. LUIGI,	»
PIAZZA prof. dott. SAUL,	»
RAVIZZA rag. cav. uff. GASPARE,	»
SESTILLI prof. dott. GINO,	»
SPITZER dott. LEONE,	»
TOGNOLI prof. dott. GUIDO,	»
MICHEL prof. dott. PAOLO,	» <i>Relatore.</i>

114

ROMA  
ESPRESSO  
21  
CONSEGNATO AL FATTORINO A ORE

